


الصف الثالث الثانوى

# تأليف

**أ/ كمال يونس كبشة**

**أ.د/ سمر عبد الفتاح لاشين** **د/ أمل الشحات حافظ**








**شركة سقارة للنشر**

ش.م.م

الطبعــة الأولى ٢٠١٦/ ٢٠١٧

رقم الإيــداع ٨٧٠٤ / ٢٠١٦

الرقم الدولى 5 - 032 - 706 - 977 - 978

# المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

المعلم الفاضل........

المعلمة الفاضلة ........

يسرنا أن نقدم هذا الدليل لمعلمى مادة الرياضيات للصف الثالث الثانوى (علمى) آملين الاستعانة منه فى اعداد وتحضير الدرس وتنفيذها كاحد المصادر التى تساعد تحقيق النتائج المرجوه.

ونحن نقدم لك هذا الدليل ليكون مرشدًا فى تخطيط وتنفيذ الدروس بما يتلائم مع مستويات الطلبة والطالبات ويساعد على تنمية مهارات التفكير العلمى وفى محاولة لأن يمتزج التعليم بالمتعه والتشوق وذلك بالاعتماد على اساليب التعلم الحديثة.

ونحن اذا نضع هذا الدليل بين يديك أيها المعلم الفاضل، فإننا نقدم أمثلة لا يجب الوقوف عليها فقط، بل نعدها منطلقًا لتنمية خبراتك وابراز قدراتك الابداعية.

## فلسفة مناهج الرياضيات للمرحلة الثانوية «القسم العلمى»:

من المهم تحديد الفلسفة التى يمكن تطوير مناهج الرياضيات فى ضوئها، والتى تنبثق من فلسفة التربية لمواجهة التحديات المستخدمة على مجتمعنا.

وحيث إن الرياضيات وسيلة مهمة لإعداد المتعلم لمواجهة مشكلات بيئته المتنوعة والإسهام فى حلها، بالإضافة إلى إعداده لمواجهة تحديات عديدة عالمية وإقليمية ومحلية، الأمر الذى يحتم تنمية أنماط متعددة من التفكير لدى المتعلم وتنمية مهاراته فى حل المشكلات، وتنمية الحس البحثى لديهم وتنمية العديد من القيم والاتجاهات وأوجه التقدير التى تجعله يتصدى للسلبية الفكرية ويقبل المخاطر والمشاركة الايجابية والسعى إلى تعليم ذاته والوصول إلى المعرفة الرياضية من خلال مصادرها الأصلية وتوظيفها فى نمذجة المشكلات المحلية والعالمية والتوصل إلى حلول إبداعية لها، هذا بالرضافة إلى إبراز دور الرياضيات فى خدمة المجتمع والإسهام فى تطويره وحل مشكلاته.وأيضا دورها فى خدمة العلوم الأخري وتقدمها، بالإضافة إلى تقديم الأساسيات الرياضية اللازمة للطلاب عند دراستهم الجامعية مع جعل المناهج مرنة تسمح بحرية الاختيار مراعاة للفروق الفردية مع تفعيل استخدام التقنيات الحديثة فى تعليم وتعلم الرياضيات.

**ونورد فيما يلى أهم منطلقات فلسفة مناهج الرياضيات:**

- ❑ تقدير دور العلماء والإشارة إلى الرواد المعاصرين، الذين أسهموا فى نظرياتها وتطبيقاتها، وتأكيد أن الرياضيات علم فكر يسهم فى التكامل الحضارات، بما فى ذلك ما أسهمت وتسهم به الحضارات المصرية والعربية والإسلامية.

- ❑ ينبغى أن يكون لتعليم الرياضيات دور مجتمعى بمعنى اهتمام مناهج الرياضيات بالمساهمة فى معالجة بعض قضايا المجتمع.

# المقدمة

- ينبغى أن تكون هناك رياضيات للجميع فى شكل مقررات تعالج بمستويات مختلفة تتفق مع تنوع واختلاف أهداف تعليم الرياضيات لمختلف الطلاب، خاصة فى إطار أن التعليم الآن جماهيرى ملزم لاستيعاب جميع الطلاب فى مرحلة الإلزام وأن نسبة كبيرة منهم تواصل التعليم حتى نهاية المرحلة الثانوية.

- تسهم الرياضيات كأحد علوم التكنولوجيا فى تطورها حيث ترتبط مناهجها بقضايا واحتياجات الأجيال الحالية ومحاولة التنبؤ باحتياجات الأجيال اللاحقة، بما يعطى الطلاب دوافع نحو دراسة مادة الرياضيات.

- تدريس موضوعات متقدمة فى المراحل الأولى من التعليم، مع نمو دراستها فى المرحلة الثانوية وما بعد ذلك، والتقليل من التعليم الشكلى للرياضيات

فى المستوى العام (غير المتخصص) ويشار بوجه خاص إلى دراسة الاحتمال والتوبولوجى والتحويلات الهندسية والنمذجة الرياضية والمنطق الرياضى والوياضيات الحيوية... ألخ والطرق العددية لما لها من أهمية فى حل مشكلات الرياضيات باستخدام الحاسب الآلى.

- هناك مستويات وقدرات متفاوتة بين المتعلمين لابد أن تقدم مقررات مختلفة لفئات المتعلمين.

- إرساء القدرة على التفكير النقدى المنهجى، وتنمية الرغبة فى البحث ومهارة التفكير المنطقى لدى الطلاب فى كافة الصفوف الدراسية، وذلك للتأكد من اكتسابهم مهارة التفكير التحليلى والقدرة على حل المشكلات وممارسة العمل الإبداعى الخلاق.

- تسهم الرياضيات التطبيقية بفروعها المختلفة فى حل العديد من المشكلات الحياتية الهندسية، والطبية،....إلخ.

## أسس بناء مناهج الرياضيات:

تعتمد عملية بناء مناهج الرياضيات وتنظيمها على عدة أسس البعض منها يتعلق بالتطورات العلمية وتكنولوجية الاتصالات بصورة عامة وتكنولوجيا التعليم بصورة خاصة، والبعض الآخر يتعلق بفلسفة المجتمع وحاجاته وحاجات أفراده واتجاهاتهم.

**ويمكن تصنيف هذه الأسس فى أربع مجالات رئيسه على النحو التالى:**

### أولًا: الأسس العلمية:

**تستند عملية بناء مناهج الرياضيات إلى مجموعة من الأسس العلمية منها:**

- البناء على ما تم دراسته من معارف ومهارات رياضية بالمرحلة السابقة.

- أن الرياضيات علم قائم بذاته له مفاهيمه وتعميماته وحقائقه ونظرياته ومهاراته فى بناء متكامل، وهو علم متطور ومتنامى.

- أن الرياضيات ذات طبيعة تراكمية تبدأ بالخبرات المحسوسة ثم شبه المحسوسة حتى تصل إلى الخبرات المجردة.

# المقدمة

- ❑ اعتبار الرياضيات أداة ووسيلة تكامل وتربط مع العلوم الأخرى.
- ❑ إسهام محتوى الرياضيات فى تحقيق الأهداف المنشودة من تدريس الرياضيات وأن يراعى فى مفرداته أن تكون فى مستوى المرحلة التعليمية.
- ❑ - تأكيد مناهج الرياضيات على الإهتمام بالمفاهيم وكيفية استقرائها واتقان المهارات الخاصة بها.

## ثانيًا: الأسس التربوية:

**تستند عملية بناء مناهج الرياضيات إلى مجموعة من الأسس التربوية منها:**

- ❑ اعتبار الرياضيات لغة تواصل وأسلوب تفكير تتمثل فى رموزها ومصطلحاتها وأشكالها الهندسية والجداول والرسوم البيانية، وأفكارها.
- ❑ إعداد أهداف لتعليم الرياضيات بقصد أن تسهم فى إعداد المواطن المصري المتميز الذى يمتلك المعارف وأنماط التفكير الملائمة لمعايشة معطيات وتحديات المحرحلة الراهنة والمستقبلية.
- ❑ تأكيد مناهج الرياضيات على الأنشطة التى تستخدم فيها الرياضيات مثل التجارة والسياحة والتربية الرياضية وغيرها بحيث تكون الرياضيات علما تطبيقيًا.
- ❑ تأكيد مناهج الرياضيات على الإهتمام بأساليب التفكير وأنماطه المختلفة.
- ❑ تأكيد مناهج الرياضيات على الاهتمام باستخدام الاستراتيجيات التدريسية الفعالة المتنوعة.
- ❑ الاهتمام باستخدام التكنولوجيا الحديثة فى التدريس.
- ❑ تشجيع الطلاب على الاكتشاف والاستقراء والابتكار والتعرض لمواقف حياتية جديدة.
- ❑ تنمية اتجاهات إيجابية نحو دراسة مادة الرياضيات وتعلمها من خلال خلق دافعية ذاتية يدعمها ربراز العنصر الجماعى والثقافى والنفعى للرياضيات.

## ثالثًا: الأسس النفسية:

**تستند عملية بناء مناهج الرياضيات إلى مجموعة من الأسس النفسية منها:**

- ❑ طبيعة المتعلم وخصائصه العامة التى يشاركه فيها غيره من المتعلمين.
- ❑ العوامل المؤثرة فى نمو الفرد كالوراثة والبيئة والجوانب الاجتماعية والثقافية.
- ❑ خصائص ومتطلبات مرحلة النمو بالمرحلة الثانوية وتداخلها وتكاملها مع المراحل الأخرى.
- ❑ حاجات المتعلم ودوافعه ومتطلبات نموه وميوله واستعداداته واتجاهاته النفسية ومهاراته بحيث تتنوع مجالات الخبرة التى تقدم له.

# المقدمة

## رابعًا: الأسس الاجتماعية:

**تستند عملية بناء مناهج الرياضيات بالمرحلة الثانوية إلى مجموعة من الأسس الاجتماعية منها:**

- الرياضيات لا غنى عنها لتعايش الفرد مجتمعه.
- الرياضيات علم وفكر يسهم فى تكامل الحضارات بما فى ذلك ما أسهمت وتسهم به الحضارة المصرية والعربية.
- حاجة المجتمع إلى العمالة المدربة لسوق العمل ، والمسلحة بالتفكير الرياضى.
- استثمار الثروة البشرية (الطلاب) فى بناء قاعدة تنموية شاملة.
- الاهتمام بالقيم والمبادئ الخاصة بالمجتمع.
- الاهتمام بالأدوار المختلفة لفئات الشعب فى التنمية الشاملة.

## أهمية الدليل:

**يأتى دليل المعلم موازيًا ومكملًا لكتاب الطالب بهدف:**

- تزويد المعلم بخلفية ضرورية ولازمة عن الأفكار التى تكمن وراء بنية الكتاب المدرسى.
- توضح للمعلم الاستراتيجيات التدريس المتنوعة التى يمكن أن يستخدمها اثناء شرح الدرس.
- توضح للمعلم الخطوات والاجراءات اللازمة التى تساعده فى تنفيذ الدرس.
- كما يبرز الدليل جانب هام من أساليب التقويم المختلفة التى تراعى الفروق الفردية بين الطلاب.

## كيف تستخدم هذا الدليل؟

لقد حاولنا أن يكون هذا الدليل وافيًا بجميع العناصر التي قد تحتاجها لتدريس هذا المقرر وسيكون أمامك صورة من صفحات كتاب الطالب فى كل درس، مما يساعدك على ربط توجيهات الدليل ما يراه الطالب فى كتابه، ومما لا شك فيه أن هذا يزيد من فائدة الدليل بالنسبة لك، إلى جانب الصورة المصغرة من صفحة كتاب الطالب تتضمن صفحة المعلم للعناصر التالية بالنسبة لكل وحدة وكل درس.

(١) مقدمة الوحدة: وتوضح عدد من المعلومات المرتبطة بالوحدة ودروسها ومنها مخرجات التعلم وزمن التدريس والمصطلحات الأساسية ومهارات التفكير، كما توضح المقدمة وسائل ومصادر التعلم وطرق التدريس المقترح استخدامها وأخيرًا طرق التقويم.

(٢) دروس الوحدة: فى هذا الجزء يتم تناول تفاصيل كل درس من دروس الوحدة وتشمل هذه التفاصيل:

- خلفية: حيث يتم خلالها الربط بين المعلومات السابقة لدى الطالب والمعلومات الجديدة فى الدرس.
- مخرجات الدرس: حيث يتم خلالها استعراض مخرجات التعلم المرجو تحقيقها فى الدرس وهى مصاغة بصورة اجرائية قابلة للملاحظة والقياس.
- المفردات الاساسية: حيث يتم توضيح عدد من المصطلحات التي سيتم تناولها فى الدرس.
- المواد التعليمية المستخدمة: يتم الاشارة إلى الوسائل المعينة التى يمكن للمعلم استخدامها فى شرح وتحقيق اهدافه اثناء عملية التعليم والتعلم.

# المقدمة

- طرق التدريس المقترحة: يوضح هذا الجزء مسميات عدد من طرق التدريس التى يمكن للمعلم توظيفها اثناء الحصة وتتنوع هذه الطرق من درس لآخر فهناك العديد من طرق التدريس التى يمكن للمعلم استخدامها أثناء عرض المحتوى ومن هذه الطرق: المحاضرة - التعلم التعاونى - العصف الذهنى- الحوار والمناقشة - حل المشكلات - الاكتشاف.

**ما الواجب معرفته عن طرق التدريس:**

- المفهوم - خطوات التنفيذ- متطلبات التنفيذ- المميزات- العيوب أو صعوبات التنفيذ.

**كيف يتم اختيار طريقة التدريس المناسبة:**

- يتم اختيار طريقة التدريس فى ضوء مخرجات التعلم المستهدفة والمحتوى وخصائص الطلاب وفقًا للمرحلة العمرية والتعليمية والوقت المتاح.

**أى طرق التدريس أفضل:**

- لا توجد طريقة تدريس بعينها هى الأفضل ولكن افضل الطرق هي التي تناسب الطالب والموقف التعليمى وتساعد فى تحقيق الأهداف المرجوة.

**نماذج طرق التدريس:**

**التعلم التعاونى :**

- اسلوب تعلم يتم فيه تقسيم الطلاب إلى مجموعات صغيرة متجانسة أو غير متجانسة وفقًا للهدف أو المهمة التي سيكلف بها افراد المجموعة ويقوم افراد المجموعة بالتعاون فيما بينهم لإنجاز المهمة المكلفة بها، وتهدف هذه الطريقة إلى تنمية روح التعاون بدلًا من التنافس وتشجيع روح الفريق.

**العصف الذهنى:**

- يتم خلال الموقف التعليمى تحديد موضوع أو قضية أو سؤال، ويُطلب من الطلاب استدعاء أكبر قدر من المعلومات والأفكار أو الإجابات أو الحلول المرتبطة بتلك القضية أو هذا الموضوع؛ وذلك وفق قواعد متفق عليها، وتتمثل فى تسجيل الأفكار كافة وعدم النقد أو التقييم لأى فكرة لتشجيع الجميع على المشاركة الإيجابية؛ وبالتالى توليد اكبر قدر من الأفكار العادية أو المبتكرة، وبعد الانتهاء من عملية استدعاء الأفكار يتم مناقشتها للوصول إلى أفضل حل أو إجابة أو فكرة وذلك باستبعاد الأفكار غير المرتبطة أو المكررة دون الإشارة التى صاحب تلك الفكرة، ويمكن تلخيص خطوات العصف الذهنى فى أربع خطوات أساسية هى:
  - الإعداد والتهيئة : للموضوع الذى سيتم استدعاء الأفكار بشأنه.
  - طرح الموضوع : التأكد من وضوح الموضوع بالنسبة للجميع.
  - توليد الأفكار: بمشاركة كافة الطلاب.
  - تقويم الأفكار: حذف المكرر أو غير المرتبط والاتفاق على افضل الأفكار أو الإجابات.

# المقدمة

### حل المشكلات:

- هي إحدى الطرق العلمية التى تهدف إلى الوصول إلى نتائج او اقتراح حلول لمشكلة محددة تمثل عائقًا أو تحديًا للطلاب، تهدف هذه الطريقة إلى تدريب الطلاب على اتباع الخطوات العلمية أو التفكير العلمى لمواجهة مشكلة معينة، تعتمد تلك الاستراتيجية على تنفيذ عدد من الخطوات منها تحديد المشكلة تحديدًا دقيقًا وكاملًا، والبدء فى جمع معلومات عن تلك المشكلة والحقائق المرتبطة بها، فرض فروض تمثل الحلول الممكنة لتلك المشكلة، ويتم اختبار تلك الفروض لاختيار أيها ساهم فى حل المشكلة، وفى الختام استخلاص النتائج وتقديم الحلول الممكنة؛ ومن ثم يمكن تعميم تلك النتائج فى مواقف أخرى مشابهة للمشكلة التى تم دراستها.

### الحوار والمناقشة:

- تمثل تلك الطريقة إحدى الطرق اللفظية، ويمكن تعريف طريقة المناقشة بأنها حوار منظم يعتمد على تبادل الآراء والأفكار بين المعلم والطلاب أو بين الطلاب بعضهم البعض، وتهدف هذه الطريقة إلى تنمية مهارات التفكير لدى الطلاب والتدريب على عرض الأفكار مدعومة بالدليل على صحتها، فضلاً عن الالتزام بآداب الحوار والمناقشة كإحدى المهارات الاجتماعية الواجب تنميتها لدى الطلاب.
- تتمثل خطوات المناقشة فى تحديد المعلم للهدف من المناقشة، وتقسيم هذا الهدف إلى عدة أفكار فرعية أو عدد من الأسئلة المطلوب الاجابة عنها، ويتم وضع قواعد لإدارة وتنظيم المناقشات، ومن أمثلة تلك القواعد إتاحة الفرصة للطالب لعرض الفكرة كاملة ومناقشة ونقد الفكرة دون الإساءة أو التقليل من شأن صاحب الفكرة، وهكذا ويحرص المعلم على التزام الطلاب بتلك القواعد ليساعدهم على التوصل إلى الأفكار وربط المفاهيم واستخلاص الاستنتاجات والتوصيات المرتبطة بالهدف الذى تم تحديده، ومن خلال تحديد نتيجة لكل فكرة فرعية يتم التوصل إلى نتيجة للقضية أو المشكلة الأساسية.

### التعلم بالاكتشاف :

- هى عملية تفكير تعتمد على أن يقوم الطالب باسترجاع وتنظيم المعلومات السابقة لديه وإعادة صياغتها بشكل يُمكِّن من استخدامها فى مواقف جديدة، ويُعرف التعلم بالاكتشاف بأنه التعلم الذى يحدث نتيجة لمعالجة الطالب لمعلومات وتركيبها وتحويلها للوصول إلى معلومات جديدة من خلال اكتشاف أفكار أو حلول يصل إليها الطلاب بأنفسهم؛ مما يشجعهم على مواصلة عملية التعلم .

**التعلم بالاكتشاف له أنواع تعتمد على درجة التوجيه الذى يقدمه المعلم ومن تلك الأنواع:**

- الاكتشاف الموجه: والذى يوفر فيه المعلم بعض التعليمات التى تضمن مساعدة الطلاب على النجاح فى المهمة.
- الاكتشاف شبه الموجه: وفيه يقدم المعلم بعض التوجيهات العامة دون أن يتقيد بها الطالب.
- الاكتشاف الحر: فيه يواجه الطالب المشكلة بنفسه دون أى توجيهات من المعلم، ويطلب منه الوصول إلى الحل وصياغة الفروض وتصميم التجارب وتنفيذها.

# المقدمة

**اجراءات الدرس:**

أ ) **التهيئة:** وذلك من خلال مناقشة العمل التعاونى أو بند "فكر وناقش" الوارد فى بداية الدرس، ومن المعروف أن توافر الدافعية فى التعلم لدى الطلاب أمر لازم بل حتمى لضمان حُسن سير الدرس وإيجابية الطلاب، وبالتالى تتحقق الأهداف المنشودة. ويجب ألا يطغى زمن تهيئة الطلاب على الزمن المخصص لباقى أنشطة الدرس، وعادة لا يزيد زمن تهيئة الدرس عن عشر دقائق.

ب ) **تعلم:** بعد التهيئة - وفى ترابط وسلاسة - يدخل المعلم إلى خطوات عرض الدرس، فيبدأ فى تنفيذ الأنشطة الواردة فى هذا الجزء من الدليل وهى ترتبط ارتباطًا وثيقًا بصفحة كتاب الطالب، وأن الربط بين ما يحدث فى مرحلة تهيئة الطلاب وبين بداية الدرس أمر مهم جدًّا، حتى لا تفقد التهيئة أهميتها ودورها فى نجاح الدرس وتحقيق أهدافه.

ويتخلل هذا الجزء استعراض للأمثلة والتدريبات كافة وكذلك الأنشطة الموضحة ، ويتاح لك فى هذا الجزء مزيد من الطرق لاستنتاج القوانين او العلاقات وعدد من التمارين الإثرائية التى يمكن استخدامها فى حالة توافر زمن متاح أو للطلاب المتفوقين، علمًا بأن هذه التمارين مجاب عنها.

جـ ) **التقييم والتدريب:** ويشمل هذا البند جوانب مهمة هى "التقييم المستمر" ويشمل إجابات لما ورد فى بند "حاول أن تحل" أو يشمل أسئلة شفهية أو تحريرية خلال عرض الدرس، الجانب الآخر هو" التقييم و التدريب"، ويشمل هذا البند إجابات ما ورد فى بند "تمارين" و الجانب الثالث هو "التقييم"، ويشمل أسئلة شفهية أو تحريرية تساعدك على التأكد من تحقيق أهداف الدرس، ومدى استفادة طلابك مما تعلموه، وذلك جنبًا إلى التمارين العامة والاختبارات الواردة فى نهاية كل وحدة.

د ) **تمارين إثرائية:** يقدم الدليل فى نهاية كل درس أنشطة إثرائية للطلاب المتفوقين، ولكن حذار أن تعلن أن هذا النشاط خاص بالطلاب المتفوقين ولا تقسم الطلاب فى الفصل إلى مجموعات وفقًا لمستوياتهم، فهذا النشاط خاص بالمعلم ليواجه الفروق الفردية بين طلابه، يمكنك أن تستقطع وقتًا فى ذات الدرس للقيام بهذه الأنشطة الإثرائية، وأحيانًا يكلف بها الطلاب بوصفها نشاطًا خارجيًّا يقومون به بعد الدرس، وقد يعرضون عليك ما أنجزوه فى هذه الأنشطة خارج وقت الحصة، أو قد تُراجِع معهم إنجازاتهم فى بداية الحصة التالية، وقبل التهيئة الجديدة (يتوقف ذلك على نوع تلك الأنشطة، وما تحتاجه من زمن لمتابعتها)، ونشير هنا إلى أنه عند تكليف أى طالب بنشاط ما يجب أن تتابع إنجازه فيه، حيث إن عدم توفر ذلك يؤدى إلى تكاسلهم بل إهمالهم القيام بأى نشاط إثرائى.

هـ ) **الأخطاء الشائعة:** يتم استعراض عدد من الصعوبات التى تواجه الطلاب نتيجة بعض الأخطاء المتوقع منهم الوقوع بها، وتختلف هذه الأخطاء باختلاف الموضوع والوسائل المستخدمة وكذلك المستوى الأكاديمي للطلاب.

و ) **ملخص الوحدة والاختبار التراكمى:** تنتهي الوحدة بعرض ملخص لدروس الوحدة وتمارين عامة، وكذا اختبار تراكمى للوحدة علمًا بأن الدليل يوفر لك إجابات لكل منهما.



# الجانب النظرى لدليل المعلم

**والآن عزيزى المعلم كى تقوم بدورك على أكمل وجه سوف نتناول عرضًا موجزًا للجانب النظرى للدليل عن النقاط التالية:**

- تطبيقات الرياضيات .
- تنظيم محتوى مادة الرياضيات فى الصف الثالث الثانوى.
- تصنيف أهداف تدريس الرياضيات.
- إستراتيجيات عامة للتدريس الناجح.
- معايير ومؤشرات الصف الثانى الثانوى.
- الاتجاهات الحديثة في تعليم الرياضيات.
- خصائص النمو لطلاب المرحلة الثانوية.
- إدارة وتنظيم بنية التعلم النشط.
- بناء جدول مواصفات الاختبار التحصيلى.

### طبيعة الرياضيات

من أحد ركائز بناء المنهج مراعاة طبيعة المادة كأحد المؤثرات على مكوناته من حيث الأهداف والمحتوى وطرق التدريس والأنشطة التعليمية واساليب التقويم، لذا من الضرورى توضيح الفرق بين طبيعة الرياضيات كعلم وكمادة دراسية. لاستيعاب طبيعة الرياضيات لابد من إدراك مراحل تطور الرياضيات عبر العصور المختلفة وفهم التغيرات التى تحدث فى طبيعة الرياضيات من عصر إلى آخر، ويمكن التعرف على طبيعة الرياضيات فى ثلاثة فترات زمنية تمثل تاريخ تطور الرياضيات وهى:

**الفترة الأولى** منذ نشأة الرياضيات وحتى قبل ظهور الحضارة الاغريقية، واتسمت طبيعة الرياضيات فى هذه الفترة بكونها ذات طبيعة عملية لم تكن تعتمد على البرهان المنطقى وكانت تعتمد على الحالات الخاصة فقط .

**الفترة الثانية**: منذ نشأة الحضارة الاغريقية حتى القرن التاسع عشر، تميزت هذه الفترة ببداية النظام البديهى القائم على المنطق حيث يتكون هذا النظام من مجموعة بسيطة من المعرفات واللا معرفات والبديهيات والمسلمات ومنها تشتق النظريات ، وغلب على طبيعة الرياضيات فى هذه الفترة الطابع التجريدى واستخدام الرموز.

**الفترة الثالثة** : من القرم التاسع عشر حتى الآن حيث تم رفض فكرة الصدق المطلق التى غلبت على الفترة السابقة بل اصبح هذا الصدق نسبى ، وبدأ فى هذه الفترة استخدام لغة موحدة لجميع فروع الرياضيات واصبحت اكثر تجريدا وتعددت الانظمة الرياضية واصبح اسلوب الاستنباط الرياضى اسلوب عام فى جميع مجالات الرياضيات.

إن الرياضيات كعلم أو كمادة دراسية ذات طبيعة استدلالية أى الوصول إلى نتائج صادقة من خلال مقدمات مسلم بصدقها وفقًا لخطوات تحكمها قوانين المنطق، ومن خلال هذا الاستدلال يمكن اشتقاق النتائج والنظريات.

# المقدمة

وتختلف الرياضيات كعلم عن الرياضيات كمادة دراسية باختلاف طريقة المعالجة واسلوب العرض ويمكن توضيح ذلك **كمايلى**:

- الرياضيات كمادة دراسية تحتوى على المفاهيم الاساسية لعلم الرياضيات ولكن بعد تبسيطها.
- الرياضيات كعلم هى بناء استدلالى يهدف إلى الوصول إلى النظريات بينما الرياضيات كمادة دراسية لاتهدف إلى اشتقاق الطالب لمعلومات رياضية جديدة مثلما يفعل العلماء.
- الرياضيات كعلم تتضمن المسلمات فى صيغة تجريدية بينما هذه المسلمات تقدم للطالب فى المادة الدراسية بصورة واضحة ومفهومه ومبسطة..

**الرياضيات والعلوم الأخرى**

الرياضيات علم حى دائم التطور، تزداد أهميته إلى درجة القول بأن الرياضيات أصبحت مركز التطور الحضارى والتكنولوجي المعاصر والمستقبلى، وذلك لأن تطبيقاتها وأنماطها أصبحت تغطى كل أنواع الأنشطة .. فى الفنون والأداب فى سوق العمل ومجالات الترويح ... فى الإستراتيجيات العسكرية وقرارات السياسيين وفى الإنتاج والخدمات. الرياضيات كانت ومازالت نشاطًا يعبر عن ثقافة إنسانية تتوسع من داخلها لتحل مشكلات من خارجها، وتكتشف من خلال نمذجه وتجريد مواقف من خارجها علاقات تثريها من داخلها، لم يعد نشاط الرياضيات قاصرًا على العدد والشكل الذين كانا مصدرى إلهامها، بل يمتد إلى نشاطها لدراسة العلاقات والأنماط وإلى اشتقاق نتائج مع مقدمات، ولم تعد الرياضيات مجرد أرقام ورموز يفهمها قلة من الناس، بل لغة يتواصل بها ويتعامل معها غالبية البشر، ويعمل منطقها على تيسير عمل الحاسبات وبث واستقبال المعلومات والتواصل بها من خلال الألياف الضوئية، تعددت مجالات وفروع الرياضيات فى بنى مجردة مثل الزمرة (Group) والحقل (Field) وفضاء المتجه (Vector space) لها تمثيلاتها فى الفروع المختلفة.

ورغم كل التجريدات الرياضية فإن الرياضيات تنصت للطبيعة لترسم بها نماذج ينبثق منها وعنها حلول للمشكلات والرياضيات تتعامل مع المؤكدات ومع الاحتمالات واللايقينيات، مع مظاهر استاتيكية وأخرى ديناميكية .. وفوضوية تتعامل مع أشكال مثالية منتظمة وأخرى معقدة، مع أبعاد صحيحة وأخرى كسورية، وتسهم الرياضيات فى حل كثير من المشكلات والتحديات العملية والحياتية، من خلال تمثيلها أو نمذجتها علاقات بلغة الرياضيات ورموزها، يتم حلها ثم إعادة ترجمتها إلى أصولها المادية ، الرياضيات - مثلاً - تشرح وتفسر لنا ظواهر النمو فى الكائنات الحية وظاهرات التآكل من مواد إشعاعية (والتى تمثلها قوى أسية فى الجبر)، كما أن الرياضيات تقدم لنا نماذج عديدة للتصميمات المعمارية والصناعية، وتنظم لنا عمليات الأنشطة الخدمية والإنتاجية، وتتنبأ لنا بجدوى القيام بمشروعات جديدة، الرياضيات تصف لنا كيف تنساب الموسيقى ونغماتها الجميلة، الرياضيات تمدنا بأشكال هندسية يمكن أن تمثل وحدات التكوين لأشكال زخرفية ومصورات فنية جميلة

# المقدمة

**تنظيم محتوى الرياضيات فى الصف الثانى الثانوى (علمى):**

يجرى تدريس الرياضيات فى الصف الثانى الثانوى (علمى) فى شكل وحدات دراسية موزعة مصفوفيًّا بين صفوف المرحلة الثانوية، وبين المجالات المعروفة: الأعداد والعمليات عليها، الجبر والعلاقات والدوال، الهندسة، وحساب المثلثات. ومن ناحية أخرى فإن المحتوى ينمو رأسيًّا (عبر الصفوف ) وحلزونيًّا فى كل فرع، ويتوزع أفقيًّا (فى كل صف) بحيث يتضمن وحدات من فروع مختلفة تعكس- إلى حد ما- وحدة الفكر الرياضى. ويراعى فى جميع الحالات التناغم الرياضى لمتطلبات الوحدات على اختلاف انتماءاتها الفرعية ولخدمة العلوم الأخرى ذات الصلة.

**تصنيف أهداف تدريس الرياضيات:**

يواجه المعلم دائمًا بالسؤال الآتى «لماذا نعلِّم الرِّياضيات؟» أو ما الهدف منها، ان تدريس الرياضيات يهدف إلى تزويد الطالب بالمعارف الرياضية واكتساب المهارات المرتبطة بتلك المعارف وبالتالى توظيف واستخدام تلك المعارف والمهارات من خلال تكوين اتجاهات إيجابية نحو دراستها ، وبالتالى يمكن تلخيص اهداف تدريس الرياضيات إلى أهداف تتعلق :

- بمعرفة وفهم اساسيات مادة الرياضيات.
- بالتدريب على اساليب تفكير سليمة وتنميتها.
- باكتساب المهارات الرياضية (العقلية والنفس حركية)
- باكتساب اتجاهات موجبة وتنمية ميول واوجه التقدير نحو الرياضيات وعلماؤها.

**هناك أكثر من طريقة للتعريف بتصنيف أهداف تعليم الرياضيات، أشهرها تصنيف الأهداف إلى:**

(١) أهداف معرفية Cognitive تتمثل الأهداف المعرفية فى معرفة اساسيات المادة وفهم بنيتها وتركيبها والأسس النظرية لبعض النواحى التطبيقية حيث يساعد ذلك علي اكساب الطالب القدرة على تطبيق القواعد والنظريات فى المادة الدراسية أو فى مواقف حياتية كما تسهم معرفة تلك الاساسيات فى فهم اساسيات مواد دراسية اخرى.

(٢) أهداف وجدانيّة Affective تتعلّق بتقدير appreciation الرياضيات كعلم ومجال وأسلوب تفكير بشرى، وتقدير الرياضيين وإسهاماتهم، وتكوين ميول واتجاهات إيجابية نحو دراسة الرياضيات، ونحو دورها فى التقدُّم ونحو أساليبها فى التفكير ودقة لغتها فى الاتصال سواء بالرمز أو بالشكل البيانى.

(٣) أهداف نفسحركية Psychomotor يقصد بها تنمية المهارات العملية والعقلية، مثل الإنشاءات الهندسية، واستخدام أدوات ذات طابع رياضى هندسى أو حسابى أو حوسبى، المهارات العملية فى الرياضيات يغلب عليها الناحية الادائية وتسهم الناحية المعرفية بقدر أقل من الناحية اليدوية، بينما المهارات العقلية المتمثلة فى استخدام المفاهيم والمعارف فى حل المشكلات فيغلب عليها الناحية المعرفية التى تترجم بالمهارة اليدوية الى خطوات وخورازميات للحل.

# المقدمة

## إستراتيجيات عامة للتدريس الناجح

إستراتيجية التدريس: هى خطة تحركات المعلم فى تحقيق أهداف الدرس، مع ملاحظة أن الهدف الأساسى للتدريس والتعليم هو أن يتعلم الطالب. ويقاس نجاح الاستراتيجية بمدى كفاءتها فى أن يتعلَّم الطلاب ما يراد لهم أن يتعلموه، بغرض مساعدة الطلاب فى أن يبنوا بأنفسهم ويكتشفوا المعارف التى يتعلمونها فى ضوء النظرية البنائية Constructivism وتتضمن إستراتيجية التدريس الناجحة أن يقوم المعلم بالآتى:

- التقدُّم بمشكلة أو سؤال يثير انتباه الطلاب (وقد يكون قصة تاريخية).
- إعطاء فرصة للطلاب للمناقشة.
- توزيع العمل بين أعمال تعاونية فى مجموعات صغيرة تعمل تعاونيًّا، وأعمال فردية يفكر فيها كل طالب بنفسه، وأعمال جماعية يحدث فيها تفاعلات بين المعلم والطلاب وبين الطلاب أنفسهم.
- فى نهاية كل مناقشة أو عمل تعاونى أو عروض من جانب بعض الطلاب يقوم المعلم بتلخيص واضح لما تم مناقشته أو حله متضمنًا الأساسيات: تعريفات، علاقات، منطوق نظريات لها براهين، إلخ.
- إعطاء الطلاب فرصًا داخل الفصل أو المنزل (واجبات) لاكتشاف بعض الخواص أو العلاقات بأنفسهم.
- تشجيع الطلاب على إعطاء حلول أو براهين بديلة.
- عند تدريس مفهوم أو علاقة ضمن عدة مفاهيم يعطى المعلم مثال ولا مثال على المفهوم أو العلاقة الجديدة .
- البعد عن التلقين أو سرد الحقائق وعرض الاجابات الجاهزة دون مشاركة فعالة من الطلاب.
- تنويع السلوكيات (أى طرق التدريس) فى الحصة الواحدة.
- الحرص على إعطاء رعاية خاصة فى فترة العمل الفردى أو فى المجموعات التعاونية للطلاب بطيئى التعلم أو من هم دون المستوى فى قدراتهم على التعلم، وكذلك الحال بالنسبة إلى الطلاب المتفوقين.
- تنويع الواجبات سواء داخل الفصل أو فى المنزل مع مراعاة الفروق الفردية- ليس من الضرورة أن يحل كل الطلاب جميع التمارين فى الكتاب خاصة بالنسبة إلى الطلاب «الضعاف»، فيُقدَّم لهم الحد الأدنى، ويُلاحظ تقدمهم حتى يصلوا إلى مستويات أفضل متدرِّجين فى الواجبات.
- تحديد بعض الساعات للمساعدة خارج الفصل فى مكتب المعلم أو فى المكتبة.
- مساعدة الطالب على أن يشعر بأنه يمكنه النجاح والتفوق فى هذا المقرر.

## وسائط تعليمية عامة

الوسيط التعليمى هو مادَّة تعليمية مكتوبة أو مرسومة، أو صورة ثابتة أو متحرِّكة مُسجَّلة على أوراق أو شرائط أو أقراص مدمجة (CDs) أو مخزنة على كمبيوتر.

وتشمل الوسائط التعليمية الأدوات والأجهزة المستخدمة فى عرض واستخدام الموادِّ التعليميَّة والبرمجيات. وقد يكون الوسيط التعليميُّ ملصقًا أو بطاقاتٍ كرتونية أو قطعًا خشبيَّة أو بلاستيكية أو أجهزة لعرض شفافيات أو صور معتمة أو جهاز سينما أو حاسوبًا، وقد تكون موادَّ من الطبيعة أو مصنعة أو نماذج محاكاة لأشكال هندسية أو تجارب معمليَّة.

# المقدمة

والأصل فى الوسيط التعليمى هو أن يستخدمه الطالب بنفسه ويمارس من خلاله عملًا تعليميًّا نشيطًا، لا أن يكتفى بمشاهدته سواء قام المعلم بتشغيله أو كان يعمل آليًّا، فالمهم مثلاً أن يعمل الطالب على الحاسوب hands on لاكتشاف علاقة رياضية أو تحقيق صحتها أو تمثيل بيانى لأحد الجداول مستخدمًا برنامج اللوحة الجدولية excelsheet أو رسم بعض الأشكال الهندسية باستخدام سلحفاة برنامج اللوجو (LOGO) أو البرامج الرياضية المتخصص مثل geogebra.

والمبدأ الذى نرتئيه هنا هو أن التكنولوجيا بصفة خاصة، والوسائط التعليمية المتعددة بصفة عامة، «حليفة وليست بديلة للمعلم»- بمعنى أن التكنولوجيا أداة يستثمرها المعلم فى تيسير عملية التعلم لا أن تحل محله.

## معايير ومؤشرات الصف الثالث الثانوى (علمى)

### المعيار الأول: تعرف المفاهيم الأساسية فى التفاضل (الاشتقاق)، ويطبقها فى مواقف فيزيائية وحياتية مختلفة

- يوجد مشتقات الدوال المثلثية قاس ، قتا س ، ظتا س.
- يوجد الاشتقاق لدوال ضمنية (صريحة ، ضمنية ، بارامترية...).
- يوجد المشتقات العليا (الثانية والثالثة) لدوال مختلفة ويتعرف طريقة التعبير عنها .
- يوجد معادلتى المماس والعمودى لمنحنى عند نقطة تقع عليه كتطبيق على الاشتقاق.
- يوجد المعدلات الزمنية المرتبطة متضمنة التطبيقات الفيزيائية.
- ينمذج ويحل مشكلات حياتية واقتصادية.
- يستخدم المشتقة الأولى لدراسة تزايد وتناقص الدالة القابلة للاشتقاق.
- يحدد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة القابلة للاشتقاق.
- يتعرف ويوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة لدالة فى فترة مغلقة.
- يوجد النقط الحرجة والتحدب لأعلى والتحدب لأسفل ونقط الانقلاب لدالةٍ.
- يوجد العلاقة بين منحنى الدالة والمشتقة الأولى.
- يدرس سلوك دالة من حيث الاضطراد والقيم العظمى والصغرى من خلال المشتقة الأولى.
- يرسم المنحنيات لدوال كثيرة الحدود حتى الدرجة الثالثة فقط.

### المعيار الثانى: تعرف تفاضل وتكامل الدوال الأسية واللوغارتمية

- يتعرف مفهوم العدد النيبيرى هـ من خلال النهايات
- $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} (١ + \text{س})^{\frac{١}{\text{س}}} = \text{هـ}$ ، $\underset{\text{س}\to \infty}{\text{نهـا}} (١ + \frac{١}{\text{س}})^{\text{س}} = \text{هـ}$
- يوجد بعض النهايات التى تؤول إلى العدد هـ ومضاعفاته
- $\underset{\text{س}\to \infty}{\text{نهـا}} (١ + \frac{١}{\text{س}})^{٢\text{س}} = \underset{\text{س}\to \infty}{\text{نهـا}} [(١ + \frac{١}{\text{س}})^{\text{س}}]^{٢} = \text{هـ}^{٢}$
- يتعرف مفهوم اللوغاريتم الطبيعى $\text{لو}_{\text{هـ}}$ من خلال النهاية
- $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{أ}^{\text{س}} - ١}{\text{س}} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ}$

# المقدمة

- يتعرف بعض خواص اللوغاريتم الطبيعى مثل:
- $\text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{س} = \text{ص} + \text{هـ}^{\text{ص}} = \text{س}$
- $\text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}} = \text{س}$ ، $\text{س} > ٠$
- $\text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{هـ} = ١$ ، $\text{لو}_{\text{أ}}\ \text{س} = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{س}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{أ}}$
- يوجد مشتقات الدوال الأسية $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$، $\text{ص} = \text{أ}^{\text{س}}$، ومشتقه الدالة اللوغاريتمية $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{س}$ ، $\text{ص} = \text{لو}_{\text{أ}}\ \text{س}$
- تكامل الدوال $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$ ، $\text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{س}$

### المعيار الثالث: تعرف المفاهيم الأساسية فى التكامل المحدد، ويطبقها فى مواقف فيزيائية وحياتية مختلفة

- يتعرف بعض طرق التكامل مثل: التعويض غير المثلثى، التكامل بالتجزىء $\int \text{س}\ \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{ء س}$
- يتعرف تكامل الدوال المثلثية وجدول التكاملات الأساسية.
- يتعرف التكامل المحدد (النظرية الأساسية فى التفاضل) ويستنتج بعض خواصه.
  - $\int_{\text{ب}}^{\text{أ}} \text{د(س) ء س} = - \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س) ء س}$
  - $\int_{\text{أ}}^{\text{أ}} \text{د(س) ء س} = ٠$
  - $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ك د(س) ء س} = \text{ك} \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س) ء س}$
  - $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} [\text{د(س)} \pm \text{ر(س)}]\ \text{ء س}$
  - $= \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س) ء س} \pm \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ر(س) ء س}$
  - $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س) ء س} + \int_{\text{ب}}^{\text{جـ}} \text{د(س) ء س} = \int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{د(س) ء س}$
  - $\int_{-\text{أ}}^{\text{أ}} \text{د(س) ء س} = ٢ \int_{٠}^{\text{أ}} \text{د(س) ء س}$ حيث د دالة زوجية.
  - $\int_{-\text{أ}}^{\text{أ}} \text{د(س) ء س} = ٠$ حيث د دالة فردية.
- يتعرف العلاقة بين التفاضل والتكامل
  - $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}} \int_{\text{أ}}^{\text{س}} \text{د(ن) ء ن} = \text{د(س)}$
  - $\int_{\text{أ}}^{\text{س}} \text{د}^{/}\text{(ن) ء ن} = \text{د(س)} - \text{د(أ)}$
- يستخدم التكامل المحدد فى حل مشكلات تتضمن إيجاد مساحة.
- يوجد مساحة المنطقة المستوية تحت المنحنى، فوق محور السينات حيث د (س) غير سالبة لجميع قيم س فى المجال باستخدام التكامل المحدد.
- يوجد مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين منحنيين.
- يستخدم التكامل المحدد فى حل مشكلات تتضمن إيجاد حجم سطح دورانى حول أحد محاور الإحداثيات.

# المقدمة

## الاتجاهات الحديثة فى تعليم الرياضيات

**هناك عدة اتجاهات حديثة لتعليم وتعلم الرياضات نورد منها ما يلى:**

تعليم الرياضيات من أجل حل مشكلات البيئة والمجتمع: ويدعو هذا الاتجاه لأن يكون للرياضيات دورًا فى معالجة قضايا ومشكلات المجتمع، وأن ترتبط المعرفة الرياضية بالخبرات الحياتية والبيئية للطلاب.

تعليم الرياضيات من أجل تنمية انماط التفكير وأسلوب حل المشكلات: يعد هذا الاتجاه من الاتجاهات المفضلة فى تعليم الرياضيات، وقد نبع هذا الاتجاه نتيجة للتغير السريع فى المعارف والأساليب التكنولوجية واستخداماتها، ولذا أصبحت المعرفة فى حد ذاتها ليست هى الهدف الاسمى بل طرق الحصول عليها، وهو ما يتمثل فى أنماط التفكير المختلفة وأسلوب حل المشكلات والتى يمكن تنميتها من خلال تعليم وتعلم الرياضيات.

تعليم الرياضيات من أجل تنمية الإبداع: للرياضيات دور هام فى تنمية الإبداع لدى المتعلمين لما لها من طبيعة تساعد على ذلك، لأن الرياضيات بمضمونها تعتمد على إدراك العلاقات للوصول إلى النتائج والنظريات وغيرها من الإبداعات، وجوهر الإبداع هو إدراك علاقات جديدة تؤدى إلى تنوع من الحلول للمشكلة الرياضية المطروحة. لهذا اعتبر التربويون أن تنمية الإبداع هدف أساسى من أهداف تعليم الرياضيات.

تعليم الرياضيات للفئات الخاصة: أدى الاهتمام بحاجات المتعلم، وضرورة تعليمه بقدر ما تسمح به استعداداته وقدراته إلى ظهور اتجاه نحو تعليم الرياضيات للفئات الخاصة (بطيئ التعلم - المتفوقون - المعاقين) حيث لكل من هذه الفئات استعداداته وقدراته وإمكاناته، وأصبح من الضرورى تصميم مناهج للرياضيات لكل فئة من هذه الفئات حتى يمكن أن تتعلم كل فئة بقدر ما لديها من خصائص.

تعليم الرياضيات فى ضوء مفهوم العولمة: نتيجة للتقدم الهائل فى تكنولوجيا الاتصال، لم يعد للبعد الجغرافى تأثيرًا فى عزل الدول عن بعضها البعض، وأصبح العالم كقرية صغيرة متشابكة الأطراف، وأصبح للمشكلات بمختلف مجالاتها صفة العالمية، حيث لم تعد دولة واحدة بإمكاناتها قادرة على مواجهة هذه المشكلات، وبالتالى لم يعد مبدأ الاكتفاء الذاتى صالحًا للتطبيق في ظل هذه الظروف فحل محله مبدأ الاعتماد المتبادل الذى يدعو إلى إنفتاح دول العالم على بعضها البعض، لنعيش فى سلام عالمى وتعاون مشترك من أجل خير الإنسان، وهذا ما يؤدى إلى إتساع بيئة الإنسان من المحلية إلى العالمية. وهذا ما يدعو إلى أن تكون مناهج الرياضيات التى يدرسها المتعلم تساعد فى إعداده لذلك.

تعلم الرياضيات ذاتيًا : ادى الانفجار المعرفى إلى ظهور الحاجة إلى التعلم الذاتى وظهرت عدة أساليب للتعلم الذاتى من أهمها التعلم بالمراسلة والموديولات التعليمية وباستخدام الحاسب الآلى.

إلا أن تعلم الرياضيات باستخدام الحاسب الآلى نال اهتمامًا كبيرًا من قبل التربويين والباحثين فى مجال تعليم وتعلم الرياضيات وظهرت العديد من البرامج بالعربية والإنجليزية لتعليم الرياضيات باستخدام الحاسب الآلى.

تعليم الرياضيات باستخدام الإنترنت: الإنترنت هو منظومة عالمية تربط مجموعة من الحاسبات الآلية بشبكة واحدة والإنترنت له عدة مميزات دفعت التربويين إلى المناداه بضرورة استخدامه وهى:

- الوفرة الهائلة فى مصادر المعلومات ومنها: الكتب الالكترونية، الدوريات، قواعد البيانات، الموسوعات، المواقع التعليمية
- الاتصال غير المباشر وذلك من خلال البريد الالكترونى، والبريد الصوتى.
- الاتصال المباشر وذلك من خلال التخاطب الكتابى المباشر، والتخاطب الصوتى والتخاطب بالصوت والصورة.

تعليم الرياضيات المزود بالحاسوب: يتنوع الاستخدام التعليمى للحاسوب من مساعدة الطلاب على تعلم القواعد الأساسية

# المقدمة

إلى تعلمهم لاستراتيجيات التفكير المعقد، والحاسوب أداة فعالة للطالب المتوسط القدرة، والطالب المعاق وللطالب المتفوق، ويأتى ذلك من قدرته على التكيف التعليمى لمواجهة الاحتياجات المتنوعة للطلاب ذوى القدرات المختلفة، وقد أثبتت البحوث أن التعليم المزود بالحاسوب (CAI) يوفر الجهد والوقت فى التفكير وفى حل المشكلات، كما أن الحاسوب وسيلة فعالة فى تشخيص وعلاج الأخطاء الرياضية لدى الطلاب.

## خصائص نمو طلاب المرحلة الثانوية

إن معرفة خصائص النمو لطالب المرحلة الثانوية يساعدنا على معرفة حاجاته، وتعرف مدى نمو الطالب بالنسبة لمتوسط اقرانه، ويعيش طالب المرحلة الثانوية فى مرحلة عمرية تسمى مرحلة المراهقة، ويقصد بالمراهقة أنها مرحلة النمو الذى يصل فيها الطفل إلى مرحلة البلوغ، وعند استخدام مصطلح المراهقة فإن هذا المصطلح يتضمن نموًّا جسميًّا واجتماعيًّا ونفسيًّا، وتبدأ مرحلة المراهقة عند البنين فى ثلاث عشرة سنة فأكثر تقريبًا، وتبدأ عند البنات فى سن اثنتى عشرة سنة فأكثر تقريبًا، يختلف سن بداية المراهقة من مجتمع إلى مجتمع وغالبًا ما تبدأ مبكرة فى المناطق الحارة عنها فى المناطق الباردة، ومرحلة المراهقة المبكرة التى تبدأ مع بداية البلوغ وتنتهى عند سن ست عشرة أو سبع عشرة سنة، وقد تم تحديد هذا السن بطريقة قسريه تختلف من مجتمع لآخر، وهناك اتفاق على أن تنقسم فترة المراهقة إلى مرحلتين هما، المراهقة المبكرة، المراهقة المتأخرة، وتبدأ مرحلة المراهقة المبكرة مع سن البلوغ وتنتهى فى سن ١٦ أو ١٧ سنة أو عند التحاق المراهق بالصف الثانى أو الثالث الثانوى، أما مرحلة المراهقة المتأخره فتبدأ فى نهاية التعليم الثانوى وتمتد إلى مرحلة التعليم الجامعى، وفى المرحلة الأخيرة وهى التى يستعد فيهاالمراهق لدخول مرحلة الرشد فيستعد لذلك مهنيًا ويتعرف بشكل أكثر نضجًا وقد تمتد هذه المرحلة إلى ٢٠ سنة أو أكثر.

وفيمايلى عرض لخصائص طلاب المرحلة الثانوية من حيث:

### النمو الجسمى

تعد «مرحلة المراهقة» طفرة فى النمو الجسمى، فهى مرحلة نمو جسمى سريع، وهذه التغيرات السريعة التى تصاحب النمو الجسمى ومنها الجنسى تجعله غير واثق فى نفسه وفى قدراته واهتماماته، وتكون لدية مشاعر قوية تعكس شعورة بعدم الاستقرار ومن أهم المشكلات المصاحبة للنمو الجنسى للمراهق هو ظهور حب الشباب والتهيجات الجلدية للمراهق والمراهقة، وكذلك المعاناه الجسيمة المصاحبة عند المراهقه مثل: الصداع، وآلام الظهر ونوبات تغير المزاج والاكتئاب.

#### التطبيقات التربوية لخصائص النمو الجسمى:

- الاستفادة من مادة الرياضيات والعلوم وتطبيقاتها العملية التى تعمل على تنمية جوانب النمو الجسمى بأبعادها المختلفة .
- الاهتمام بالأهداف المعرفية فى المواد المختلفة لتعريف الطلاب وتبصيرهم ببعض المشكلات كممارسة التدخين واختيار الاصدقاء.

### النمو الحركى

ينتج عن النمو الجسمى السريع ميل الطالب إلى الكسل والخمول ويكون قليل النشاط والحركة ، والمراهقون

# المقدمة

فى بداية هذه المرحلة يكون توافقة الحركى غير دقيق وتتسم حركاته بعدم الاتزان وكثيرًا ما يصطدم بالأجسام التى تعترضه أو تسقط من بين يدية الأشياء التى يمسك بها، ومما يساعده على عدم استقراره الحركى تعرضه لنقد الكبار وتعليقاتهم وتحميله العديد من المسئوليات الاجتماعية، مما قد يسبب له الارتباك وفقدان الاتزان.

التطبيقات التر بوية لخصائص النمو الحركي:

- تشجيع ورعاية النمو الحركى عن طريق الانشطة المختلفة .
- تضمين بعض موضوعات الرياضيات بالأنشطة الحركية بالتعاون مع معلم التربية الرياضية .

**النمو العقلى**

القدرات العقلية مثل القدرة اللغوية والقدرة العددية والقدرة المكانية والقدرة الميكانيكية والقدرة الموسيقية تظل فى نموها المضطرد خلال فترة المراهقة ، حيث يميل المراهق إلى القراءة والاطلاع والرحلات الخارجية وقراءة القصص والمجلات فى محاولة للبعد عن المناهج الدراسية، ويحاول المراهق التعبير عن ذاته ونقدها عن طريق مذكراته، وكتابه المذكرات الخاصة علامة من علامات النمو العقلى والنمو الاجتماعى، وقد تكون وسيلة لتفريغ الانفعالات والهروب من القلق والضيق النفسى.

التطبيقات التربوية لخصائص النمو العقلي :

- تدريب الطلاب على استخدام الاسلوب العلمى فى التفكير .
- مراعاة الفروق الفردية بين الطلاب واشراكهم فى بعض المهام والتكليفات فى ضوء قدراتهم.

**القدرات والعمليات المعرفية**

تختلف القدرات عن العمليات المعرفية، فالقدرة هى ما يستطيع الفرد عمله أو القيام به بينما تتعلق العملية المعرفية بما يحدث فى العقل ذاته أو بما يدور فى العقل وهو يستجيب للمتغيرات المختلفة وعليه فإنه يمكن القول بإن القدرة تشمل على العمليات المعرفية وأنواع مثيراتها والأشكال المختلفة لاستجاباتها؛ ولذلك فإن القدرة تؤكد على الناحية العقلية البحته مثل القدرات الاستقرائية، والعمليات المعرفية التى تعتمد على القدرات العقلية هى الإنتباه الذى ينمو فى شدته ومستواه وطول مدته يستطيع المراهق استيعاب مشكلات طويلة معقدة فى سهولة ويسر، والإدراك الذى يتأثر بنمو الفرد الجسمى والعقلى والانفعالى والإجتماعى، فينمو من المستوى الحسى المباشر عند الطفل إلى المستوى المعنوى المجرد عند المراهق، وتنمو عملية التذكر وتنمو معها القدرة على الحفظ والاسترجاع والتعرف، والتذكر عند المراهق يعتمد على الفهم واستنتاج العلاقات بين العناصر التى يتم تذكرها ويتأثر تذكر الفرد للموضوعات المختلفة بدرجة ميله نحوها واستمتاعه بها وبانفعالاته وخبراته المختلفة وأيضا بنمو القدرة على الانتباه.

أما عملية التفكير فإنها تتأثر عند المراهق بالبيئة المحيطة وبما تتضمنه من متغيرات تحفزه إلى الوان مختلفة من الاستدلال وحل المشكلات، تزداد قدرة المراهق على التخيل المجرد المبنى على الصورة اللفظية، كما تظهر القدرة المكانية لدى المراهق فى قدرته على فهم الأشكال الهندسية المختلفة وإدراك العلاقات المكانية فى سهولة تصور حركات الأشكال والمجسمات، أما القدرة العددية فتوضح فى القدرة على إجراء العمليات بسهولة وسرعة، وتظل القدرات مطردة فى نموها خلال فترة المراهقة وفترة الرشد، ما عدا قدرة السرعة الادراكية فإنها تضعف فى أواخر

# المقدمة

مرحلة المراهقة .

### النمو الإنفعالى

ترتبط انفعالات الفرد بتغييرات عضوية داخلية يصاحبها مشاعر وجدانية وتغيرات فسيولوجية وكيميائية داخل الجسم، وتؤثر بيئة الفرد فى تلك الانفعالات، فهى بمثابة متغير لها، وللنمو أثر فى تغير وتطور الاستجابات للمثيرات، ولكن المظاهر الداخلية تكون أقرب للثبات والاستقرار منها إلى التغير، وتتسم مرحلة المراهقة أنها عنيفة فى حدة الإنفعالات، حيث نجد المراهق دائم الثورة على الأوضاع متمردًا على الكبار، كثير النقد، ويشعر المراهق بأن الأسرة والمدرسة والمجتمع لا تقدر موقفه، ولا تحس بإحساسه الجديد، لذا فهو يسعى دون قصد لآن يؤكد نفسه بثورته وتمرده وعناده.

التطبيقات التربوية لخصائص النمو الانفعالى:

- تنمية الثقة والاستقلالية لدى الطلاب من خلال مشاركة المعلم للطلاب فى عرض افكارهم ومشاركتهم لمشكلاتهم الشخصية .
- اجتناب المعلم لاساليب العقاب غير التربوية (كالعقاب البدنى٩ أو السخرية أو الاستهزاء ... الخ

### النمو الإجتماعى

مع بداية مرحلة المراهقة تزداد مجالات النشاط الاجتماعى، ويتنوع الاتصال الشخصى بالمعلمين والقادة والرفاق وغيرهم، وباتساع دائرة العلاقات والتفاعل الاجتماعى يتخلص المراهق من بعض جوانب الأنانية التى تطبع سلوكه فى مرحلة الطفولة فيحاول أن يأخذ ويعطى ويتعاون مع الآخرين وأثناء تفاعل المراهق وتعامله مع الآخرين تتأكد لديه مظاهر الثقة بالنفس وتأكيد الذات، ومحاولته إشعار الآخرين بأهميته كفرد له كيان مستقل، هذا ما يؤكد ميل المراهق للعناية بمظهره وملابسه وطريقة حديثة فنجده يتحدث كثيرًا عن نفسه وعن قدراته وتفوقه وفى مجالات التحصيل أو فى مجالات الرياضة.

التطبيقات التربوية لخصائص النمو الاجتماعي:

- استثمار ميول الطالب فى تنمية شخصيته.
- تنمية التفاعل الاجتماعي بين الطلاب والمعلمين.

## إدراة وتنظيم بيئة التعلم النشـط

تتمثل الإدارة الجيدة للمعلم لبيئة التعلم والتى تعتمد على مشاركة الطلاب فى التخطيط والتنفيذ للعملية التعليمية عاملاً مهمًا على توفير الجهد والاستغلال الأمثل لموقف التعليم، وعنصرًا مهمًا فى تحقيق الأهداف التعليمية المنشودة.

ومع ظهور الأساليب التربوية الحديثة التى تؤكد على ضرورة أن يكون الطالب هو محور العملية التعليمية وأن يكون له دورًا إيجابيًا فى العملية التعليمية وبالتالى من المفضل إشتراكه فى إدارة هذه العملية، ومع التأكيد على دور التعلم النشط وهو ما أدى فى جملته إلى إدارة بيئة التعلم بتلك التغيرات التربوية، ومع مراعاة خصائص طلاب المرحلة الثانوية، حيث تختلف إدارة بيئة التعلم التى يتمركز فيها التعليم حول المتعلم، أو مما يسمح له

# المقدمة

القيام ببعض الأعمال الإدارية داخل الفصل الدراسى، ويتطلب ذلك منح الطلاب بعض الحرية فى إدارة بيئة التعلم ذاتيًا تحت توجية وإشراف المعلم، الأمر الذى يتطلب وضع مجموعة من القواعد العامة للتعامل داخل بيئة التعلم يتوفر بها الشروط التالية:

- ان تكون متوافقة مع قواعد وسياسات المدرسة وداعمه لها
- (مثل: الأهتمام بنظافة المكان – احترام المعلم – احترام الإدارة المدرسية – احترام الزملاء.....)
- ان تحدد مجموعة من الأسس التى يجب توافرها فى السلوك السوى للطلاب، وأن يدعم كل سلوك بمبررات عقلانية، بشكل يبين ضرورة هذا السلوك وفائدته لسير العمل فى الفصل بشكل إيجابى.
- إن تكون مقبولة من المعلم والطالب، وهذا يستلزم أن يتعاونا فى وضعها.

**مكونات إدارة بيئة التعلم**

حين تكون إدارة بيئة التعلم عملية مشتركة بين المعلم والطلاب، فإن هذا يعنى ضرورة إعادة صياغة المعلم لأدواره، حيث يقوم بتعظيم دور المتعلم، وأن يصبح المعلم عضوًا فى جماعة أو قائدًا فى فريق أكثر من كونه المصدر الوحيد للسلطة.

إن بيئة التعلم قد تكون حجرة الدراسة أو المعمل أو المكتبة أو حجرة الوسائط المتعددة أو غير ذلك، حيث يوجد الطلاب مع معلمهم يخططون وينفذون معًا عددًا من الأنشطة التربوية، ومن ثم فإن مكونات بيئة التعلم تتمثل فيما يلى:

- التخطيط الجيد لتحديد خطوات وطريقة تنفيذ العملية التعليمية
- التنظيم المادى للفصل لمجابهة إحتياجات العملية التعليمية
- تحديد اساليب أو طرق التفاعل بين المعلم والطلاب.
- تهيئة مناخ الفصل لمجابهة احتياجات الطلاب لتحقيق الأهداف المنشودة
- ضبط سلوك الطلاب.
- استغلال البيئة المحيطة أفضل استغلال لإحداث عملية التعليم / التعلم الجيد.
- الاستغلال الأمثل للوقت لتحقيق اكبر وقت ممكن للتعليم.

وتحدد هذه المكونات الجوانب التى يجب أن يركز عليها المعلم عند وضعه تصورًا لإدارة فصله بما يضمن له النجاح فى مهمته.

**السمات والمهارات اللازمة لإدارة بيئة التعلم النشط**

يتطلب نجاح المعلم فى قيادته التربوية لبيئة التعلم إلى توافر مجموعة من السمات والمهارات الأساسية وهى كلها لازمة لنجاح المعلم بدرجات متفاوته ومنها:

السمات الشخصية: وتشمل المبادآه، الثقة بالنفس، والقدرة على الإبتكار، وتحمل المسئولية، ضبط النفس، الحزم والسرعة فى اختيار البدائل

المهارات الفنية: وهى المعرفة المتخصصة فى فرع من فروع العلم والكفاءة فى استخدام هذا الفرع بما يحقق الهدف المنشود، وتكتسب هذه المهارات بالدراسة والخبرة والتدريب

مهارات اجتماعية وتعنى قدرة المعلم على التعامل مع طلابه وتنسيق جهودهم، وخلق روح العمل الجماعى بينهم، وايضا

# المقدمة

قدرته على الارتفاع والتأيثر ومواجهة المشاكل والتصدى لها بأسلوب ناجح.

### تنظيم بيئة التعلم النشط

تحتاج إدارة بيئة التعلم إلى عناية فائقة من المعلم للتنظيم والتخطيط والترتيب، ويعد الفصل وترتيبه أحد العوامل الرئيسية لنجاح عمل المعلم لتحقيق أهداف التعلم النشط، ولذلك يجب على المعلم أن يراعى عدد من النقاط الهامة وهى:

المرونة: وتعد حجر الزاوية فى تنظيم الفصل؛ لأنه مهما نظم المعلم فصله فسوف يتم تعديله عند التطبيق ليناسب احتياجات الطلاب واستراتيجيات التدريس المستخدمة.

(٤) نوع الانشطة: يجب أن يضع المعلم فى اعتباره أن النشاط الذى سوف يقوم به الطلاب هو الذى يحدد شكل الفصل وترتيب مقاعد الطلاب وحركاتهم مثل: التعلم الفردى – التعلم التعاونى – تعلم الأقران وهكذا.

(٥) تنظيم الاثاث والمواد والأدوات: تنظيم الفصل للتعلم النشط يعنى تنظيم المكان حتى يمكن للطلاب العمل بمفردهم أو فى مجموعات كبيرة، و إن أمكن يستخدم أثاثًا سهل الحركة حتى يمكن إعادة ترتيبه.

(٦) المصادر التعليمية: يجب ان يحتوى جزء من الحجرة على المصادر التعليمية وتكون مناسبة للطلاب من حيث المستوى العمرى وتحدى قدراتهم.

(٧) مراعاة الفروق الفردية بين الطلاب.

### إدارة وقت التعلم بفاعلية

**أن التخطيط لإدارة الوقت بمثل عاملاً مهمًّا فى التعليم داخل الفصل وهنا التخطيط يمر بالخطوات التالية:**

- دراسة استطلاعية للوقوف على كيفية استغلال الوقت ويدخل فيها دراسة السجلات المختلفة الخاصة بالتدريس والأنشطة.
- تحديد الأهداف المستهدفة بدقة.
- تحديد الأولويات والمهام اللازم تنفيذها.
- وضع خطة للعمل يحدد فيها الوقت اللازم لكل مهمة من المهام فى ضوء الأهداف والأولويات .
- تنفيذ هذه الخطة وفق جدول زمن محدد.
- متابعة تنفيذ الخطة وتقويم الأداء.
- تبنى اساليب وحلول لمواجهة مشكلات الوقت.

وتشير هنا إلى أن التخطيط لدرس ما لابد أن يرافقه زمن كل مرحلة من مراحل التدريس، وعلى المعلم أن ينجز خطته تبعًا للزمن المحدد، ولكى يحسن المعلم من إدارة وقته داخل الصف ينبغى عليه أن يقوم بالآتى:

- الإلتزام بوقت الحصة من حيث توقيت بدايتها وتوقيت نهايتها.
- تحليل المشكلات التى يمكن أن تواجهه أثناء الحصة وتستنفذ وقتها واسبابها وكيفية علاجها.
- التخطيط الجيد لدرسه حيث يساعده ذلك على إدارة الفصل بفاعلية واستثمار وقت الحصة.

### بناء جدول مواصفات الاختبار التحصيلى

يهدف الاختبار التحصيلى إلى تحديد مقدار ما اكتسبه أو تعلمه المتعلم، الأمر الذى يسمح بمقارنه مستوى تحصيل الطالب بمستوى تحصيل غيره من الطلاب الذين طبق عليهم نفس الاختبار ولبناء الاختبار التحصيلى عدة خطوات:

- تحديد الأهداف (النواتج) التى يهدف المقرر إلى تحقيقها.
- تحديد محتوى الاختبار (أى الموضوعات التى يغطيها الاختبار) فى ضوء الأهداف التى يسعى الاختبار إلى تحقيقها، ومن وسائل تحقيق ذلك عمل جدول ثنائى يطلق عليه جدول المواصفات، وهو جدول ثنائى يتضمن الموضوعات التى يجب

# المقدمة

ان يغطيها الاختبار، والأهداف التعليمية للمقرر الدراسى (نواتج التعلم)، والأهمية النسبية (الوزن النسبى للموضوعات والأهداف). واستخدام جدول المواصفات يزيد من احتمالية تمثيل الاختبار للجوانب الهامة للمقرر الدراسى، ونسب تمثيلها للأهداف المنشودة، الأمر الذى يرفع من صدق هذا الاختبار، كما أن استخدام هذا الجدول يعمل كموجة للمعلم فى اختيار الأفكار التى يجب ان يتضمنها الاختبار.

**خطوات إعداد جدول المواصفات**

- تحديد نواتج التعلم للمقرر الدراسى والأوزان النسبية لكل منها والتى تعكس الاهتمام الذى تحظى به فى عملية التدريس، وتكتب أعلى اعمدة جدول المواصفات.
- تحديد موضوعات المقرر الدراسى، ونسبة تمثيل كل منها، ولكى يتسنى للمعلم أو معد الاختبار تحديد الأوزان النسبية أو نسبة تمثيل موضوعات المقرر الدراسى يمكنه الاستعانة بالموجهات التالية:
- الزمن المخصص لتدريس كل موضوع من موضوعات المقرر الدراسى.

وبعد تحديد الموضوعات التى يتضمنها المقرر الدراسى، والأوزان النسبية لكل منها تكتب هذه الموضوعات افقيًا على صفوف الجدول، وينشأ عن تقاطع الأعمدة التى تمثل نواتج التعلم، والصفوف التى تمثل الموضوعات عدد معين من خلايا (الخانات) التى تحدد وتعكس درجة تمثيل كل موضوع من موضوعات المحتوي التى تحدد بدورها نسبة الأسئلة أو عدد الأسئلة التى يجب أن يتضمنها الاختبار بالنسبة لكل موضوع من موضوعات المحتوى ، والوزن النسبى المحدد لكل موضوع من موضوعات المحتوى، ولتحديد الأهمية النسبية لكل خلية من خلايا جدول المواصفات يتم اتباع الخطوات التالية:

- يتم تحديد وضع الخلية.
- يتم تحديد (الموضوع) الذى يتقاطع مع الخلية.
- يتم تحديد النسبة المئوية الكلية للصف.
- يتم تحديد النسبة المئوية الكلية للعمود (الهدف) الذى يتقاطع مع الخلية.
- يتم تحديد النسبة المئوية الكلية للعمود .

# المحتويات

# الوحدة الأولى

## الأشتقاق وتطبيقاته

## Differentiation with Applications

### مقدمة الوحدة

سبق أن درس الطالب مفهوم دالة التغير، ومتوسط التغير، ومعدل التغير واستنتج من ذلك المشتقة الأولى للدالة وعرف تفسيرها الهندسى (ميل المماس)، كما تعرف على قابلية الأشتقاق للدالة (المشتقة اليمنى والمشتقة اليسرى) واستنتج من ذلك العلاقة بين الأشتقاق والأتصال، ودرس بعض قواعد اشتقاق الدوال كمشتقة الدالة الثابتة والدالة د : $د(س) = س^{ن}$، ومشتقة الدالة د (س) = س، د (س) = أ $س^{ن}$، كما تعرف على مشتقة كل من:

- مجموع دالتين أو الفرق بينهما
- حاصل ضرب دالتين
- دالة الدالة (قاعدة السلسلة)
- مشتقة الدالة ص = $[د(س)]^{ن}$
- مشتقةبعض الدوال المثلثة.

كما استخدم المشتقات فى تطبيقات هندسية مثل إيجاد معادلة المماس والعمودى لمنحنى الدالة عند نقطة عليه.

**واستكمالا لهذه الدراسة سوف يدرس الطالب فى هذه الوحدة:**

- مشتقات الدوال المثلثية قا س، قتا س، ظتا س
- يوجد الأشتقاق لدوال ضمنية (صريحة ضمنية، بارامترية، ....)
- يوجد المشتقات العليا (الثانية ، والثالثة) لدوال مختلفة ويتعرف طريقة التعبير عنها.
- يوجد معادلة المماس والعمودى لمنحنى عند نقطة عليه.
- يستخدم المعدلات الزمنية المرتبطة فى حل بعض التطبيقات الفيزيائية.



الوحدة الأولى

الاشتقاق وتطبيقاته

Differentiation and it's Applications

مقدمة الوحدة

فى دراستك السابقة للدوال، تعرَّفتَ على دوال صريحة فى متغير واحد على الصورة ص = د(س) والعمليات على هذه الدوال وتركيبها، كما بحثتَ قابلية اشتقاق الدالة المتصلة على مجال ما، وأمكنك إيجاد المشتقة الأولى للدوال الجبرية وبعض الدوال المثلثية.

فى هذه الوحدة نستكمل دراسة اشتقاق الدوال المثلثية وتعرُّف دوال أخرى لا يمكن فصل متغيراتها، حيث ترتبط المتغيرات بعلاقة ضمنية أو بتعريفها من خلال متغير وسيط يعرف بالمتغير البارامترى؛ مما يتطلب دراسة أنماط أخرى للاشتقاق، مثل الاشتقاق الضمنى، والاشتقاق البارمترى الذى يعتمد على مشتقة دالة الدالة (قاعدة السلسلة) فى اشتقاق الدوال، كما نبحث وجود مشتقة مشتقة الدالة (المشتقة الثانية للدالة) فى إطار دراسة المشتقات العليا للدالة والتى تفسح المجال لدراسة تطبيقات حياتية متعددة.

كما تهتم هذه الوحدة ببعض التطبيقات المهمة للاشتقاق فى مجالات متعددة للرياضيات والفيزياء والاقتصاد والعلوم البيولوجية من خلال دراسة معادلتى المماس والعمودى على المماس لمنحنى، والمعدلات الزمنية المرتبطة لتساعدك على نمذجة وحل بعض المشكلات الحياتية التى قد تصادفك.

أهداف الوحدة

**فى نهاية الوحدة وبعد تنفيذ الأنشطة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:**

- يوجد مشتقات الدوال المثلثية قاس ، قتا س ، ظتا س.
- يوجد الاشتقاق لدوال ضمنية (صريحة ، ضمنية ، بارامترية...).
- يوجد المشتقات العليا (الثانية والثالثة) لدوال مختلفة ويتعرف طريقة التعبير عنها .
- يوجد معادلتى المماس والعمودى لمنحنى عند نقطة تقع عليه كتطبيق على الاشتقاق.
- يوجد المعدلات الزمنية المرتبطة متضمنة التطبيقات الفيزيائية.
- ينمذج ويحل مشكلات حياتية واقتصادية.

كتاب الرياضيات البحتة - التفاضل والتكامل

### مخرجات التعلم:

**فى نهاية الوحدة وتنفيذ الأنشطة فيها من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:**

- يوجد مشتقات الدوال المثلثية قاس ، قتا س ، ظتا س.
- يوجد الاشتقاق لدوال ضمنية (صريحة ، ضمنية ، بارامترية...)
- يوجد المشتقات العليا (الثانية والثالثة) لدوال مختلفة ويتعرف طريقة التعبير عنها .
- يوجد معادلتى المماس والعمودى لمنحنى عند نقطة تقع عليه كتطبيق على الاشتقاق
- يوجد المعدلات الزمنية المرتبطة متضمنة التطبيقات الفيزيائية.
- ينمذج ويحل مشكلات حياتية واقتصادية



المصطلحات الأساسية

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| الاشتقاق (التفاضل) | *Differentiation* | اشتقاق بارامترى | *Parametric Defferentiation* | معدلات مرتبطة | *Related Rates* |
| المشتقة الأولى | *First Derivative* | مشتقات عليا | *Higher Derivatives* | دالة الطلب | *Demand Function* |
| دالة مثلثية | *Trigonometric Function* | ميل المماس | *Slope of the Tangent* | التكلفة الكلية | *Total Cost* |
| دالة صريحة | *Explicit Function* | معادلة المماس | *Equation of the Tangent* | التكلفة الحدية | *Marginal Cost* |
| دالة ضمنية | *Implicit function* | معادلة العمودى | *Equation of the Normal* | الإيراد الحدى | *Marginal Revenue* |
| وسيط (بارامتر) | *Parameter* | معدل | *Rate* | الربح الحدى | *Marginal Profit* |
| اشتقاق ضمنى | *Implicit Defferentiation* | | | | |

دروس الوحدة

- الدرس (١ - ١): اشتقاق الدوال المثلثية
- الدرس (١ - ٢): الاشتقاق الضمنى والبارامترى
- الدرس (١ - ٣): المشتقات العليا للدالة
- الدرس (١ - ٤): معادلتى المماس والعمودى لمنحنى
- الدرس (١ - ٥): المعدلات الزمنية المرتبطة

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة رسومية
- حاسب آلى مزود ببرامج رسومية (*Geogebra, Graph*)



## زمن تدريس الوحدة :

(٧ حصص)

## مهارات التفكير التى تنميها الوحدة:

التفكير الناقد - التفكير الابداعى- التفكير التحليلى- حل المشكلات.

## الوسائل التعليمية المستخدمة:

السبورة التعليمية- سبورة مربعات- طباشير ملون- آلة حاسبة علمية- حاسب آلى مزود ببرامج رسومية (Geo Gebra).

## طرق التدريس المقترحة:

العرض المباشر- المناقشة - العصف الذهنى - الطريقة الأستنباطية- التعلم التعاونى- حل المشكلات.

## طرق التقييم المقترحة

تتمثل فى الأسئلة الشفهية والتحريرية الفردية والجماعية أثناء الدرس وبعد الدرس والأنشطة المقترحة وسلم التقييم الخاص بكل منها، والتكاليف الجماعية والفردية وتدريبات عامة على الوحدة والأختيار التراكمى فى نهاية الوحدة.

## المخطط التنظيمى للوحدة

**يوضح المخطط التنظيمى للوحدة:**

**أولا: المشتقات المقررة على الطالب وهى**

- مشتقة كل من :ظل التمام- قاطع التمام- القاطع.
- الأشتقاق الضمنى
- الأشتقاق البارامترى
- المشتقات ذات الرتب العليا

**ثانيًا: تطبيقات الأشتقاق**

وتتناول:

- معادلة المماس والعمودى
- المعدلات الزمنية المرتبطة وتتناول هذه التطبيقات الآتى:
- تطبيقات هندسية
- تطبيقات فيزيائية
- تطبيقات أقتصادية
- تطبيقات بيولوجية

# ١ - ١ اشتقاق الدوال المثلثية

Derivatlve of Trigomomrtric Functions



١ - ١

اشتقاق الدوال المثلثية

Derivative of Trigonometric Functions

**سوف تتعلم**

إيجاد مشتقة:

- د(س) = ظتا س
- د(س) = قا س
- د(س) = قتا س

**المصطلحات الأساسية**

- دالة مثلثية Trigonometric function
- مشتقة Drivative
- ظتا س cot(x)
- قا س Sec(x)
- قتا س Csc(x)

**الأدوات المستخدمة**

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسوب.

**مقدمة:**

سبق لك دراسة اشتقاق بعض الدوال المثلثية، وفى هذا الدرس سنذكرك ببعض المفاهيم الأساسية فى الاشتقاق لتتعرف مشتقات دوال مثلثية أخرى.

**فكر و ناقش**

تعلم أن معدل تغير الدالة د عند النقطة (أ ، د(أ)) = نهـــا (هـ ← ٠) $\frac{\text{د(أ + هـ) - د(أ)}}{\text{هـ}}$ بشرط أن تكون النهاية موجودة، وهو أيضًا مشتق الدالة د عند نفس النقطة، ويُرمز له بالرمز د/ ( أ) ويكون ميل المماس لمنحنى د عند النقطة ( أ، د(أ)) = د/ (أ)

من قراءتك البيانية للشكل المقابل ناقش قابلية الدالة د للاشتقاق عند:

س = حـ ، س = أ ، س = ب ،

س ∋ ]أ ، ب[ ، س∋ [أ ، ب]



**لاحظ أن :**

ميل المماس معروف لجميع نقط المنحنى باستثناء عند س = ب ، س = جـ وعلى ذلك فإن:

١- الدالة د غير متصلة عند س = جـ فهى غير قابلة للاشتقاق عند جـ

٢- الدالة د قابلة للاشتقاق عند س = أ لأن د/ (أ) موجودة

٣- الدالة د غير قابلة للاشتقاق عند س = ب لأن :
المشتقة اليمنى د/(ب⁺) ≠ المشتقة اليسرى د(ب⁻)

٤- تكون الدالة د قابلة للاشتقاق على الفترة ]أ ، ب[ إذا وجدت مشتقة للدالة عند كل نقطة تنتمى إلى هذه الفترة.

٥- تكون الدالة د المعرفة على الفترة المغلقة [أ ، ب] قابلة للاشتقاق إذا وفقط إذا كان كل من د/(أ⁺) ، د/(ب⁻) له وجود، وكانت د قابلة للاشتقاق على الفترة ]أ ، ب[

**تذكر : قواعد الاشتقاق**

١- $\frac{ى}{ى\,س}$ [أ د(س)] = أ د/ (س) ، أ ∋ ع

| د(س) | د/(س) |
|---|---|
| أ (أ ∋ ع) | صفر |
| س^ن (ن ∋ ع) | ن س^ن-١ |
| جا س (س^ى) | جتا س |
| جتا س (س^ى) | - جا س |
| ظا س (س^ى) | قا٢ س |

كتاب الرياضيات البحتة - التفاضل والتكامل

٤

## خلفية:

سبق أن درس الطالب إيجاد مشتقة بعض الدوال الجبرية، كما تعرف على مشتقة الدوال المثلثية الأساسية (جا س ، جتا س ، ظا س) وفى هذا الدرس يتعرف على مشتقات بعض دوال مثلثية أخرى وهى (ص = ظتا س، ص = قتا س، ص = قا س).

## مخرجات الدرس:

**فى نهاية هذا الدرس وتنفيذ الأنشطة مبنية من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:**

- ١ – يوجد مشتقة الدالة المثلثية د (س) = ظتا س
- ٢ – يوجد مشتقة الدالة المثلثية د (س) = قا س
- ٣ – يوجد مشتقة الدالة المثلثية د (س) = قتا س

## مفردات اساسية

دالة مثلثية - مشتقة

- ظتا س Cot (x)
- قا س Ses (x )
- قتا س csc (x)

## المواد التعليمية المستخدمة:

السبورة التعليمية - طباشير ملون- جهاز عرض فوق رأسى - شفافيات- آلة حاسبة علمية- برامج رسومية للحاسوب.

## طرق التدريس المقترحة:

العرض المباشر - المناقشة - العصف الذهنى - حل المشكلات.

## مكان التدريس:

الفصل الدراسى - غرفة الحاسب الآلي (الوسائل المتعددة)

## مصادر التعليم:

كتاب الطالب من صفحة (٤) إلى ص (١٥) - الشبكة الدولية للمعلومات.

## تهيئة:

- ذكر الطالب ببعض المفاهيم الأساسية للأشتقاق وهو ما يتعلق بالعلاقة بين الأتصال والأشتقاق والرسم الموجود من ص (٤) يوضح ذلك.
- أطلب إلى الطلاب إيجاد مشتقة كل من الدوال الآتية:

$\frac{ى}{ى\,س}$ [أ د(س)]

$\frac{ى}{ى\,س}$ [د(س) ± ر(س)]

- مشتقة حاصل ضرب دالتين-
- مشتقة ناتج قسمة دالتين مع إعطائهم أمثلة عددية بسيطة تذكرهم بهذه القواعد.
- اكد إلى الطلاب على مفهوم دالة الدالة لما له من أهمية قصوى فى إيجاد مشتقة الدوال المثلثية فى هذا الدرس.

## إجراءات الدرس:

**بعد استعراض مفهوم قابلية الدالة للأشتقاق وبعض قواعد الأشتقاق التى سبق للطالب دراستها ابدأ بعرض الآتى:**

### ١- مشتقة دالة ظل التام. ص (٥)

¤ أكد إلى الطلاب بأن مجال دالة ظل التام

ص = ظتا س هو ع ، س $\neq$ ن$\pi$ ، أى أن الدالة غير متصلة عندما س = ن$\pi$ حيث ن $\in$ ص والشكل الجانبى ص (٥) يوضح نقاط عدم الأتصال.

¤ أطلب إلى الطلاب أثبات العلاقة:

$$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{ظتا س}) = -\text{قتا}^{2}\text{س}$$

وذلك باشتقاق الدالة: $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}}\right)$ كناتج قسمة دالتين

### ٢- مشتقة دالة القاطع: ص (٥)

¤ أكد إلى الطلاب بأن دالة القاطع

ص = قا س متصلة على ع ماعدا:

س $\neq \frac{(٢ن + ١)\pi}{٢}$ ، كما هو موضح بالشكل الجانبى:

¤ اطلب إلى الطلاب إيجاد مشتقة $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ ( قاس ) كالآتى:

$\because$ ص = قا س $\therefore$ ص = $\frac{١}{\text{جتا س}}$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٠ - (-\text{جاس})}{\text{جتا}^{2}\text{س}} = \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}} \times \frac{١}{\text{جتا س}}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قا س ظا س}$$

### ٣- مشتقة دالة قاطع التمام:

مجال الدالة ص = قتا س هو

س $\in$ ع -{ن$\pi$} حيث ن$\in$ ص

اذا كانت ص = قتا س = $\frac{١}{\text{جتا س}}$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{ظتا س قتا س}$$

¤ ناقش مع الطلاب ما جاء فى مثال (١) ص (٦) ثم ناقش مثال (٢) ص (٦) ص (٧)



٢- $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ [د(س) $\pm$ ر(س)] = د/(س) $\pm$ ر/(س)

٣- $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ [د(س) $\times$ ر(س)] = د(س) • ر/(س) + ر(س) • د/(س)

٤- $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left[\frac{\text{د(س)}}{\text{ر(س)}}\right] = \frac{\text{ر(س)} \cdot \text{د/(س)} - \text{د(س)} \cdot \text{ر/(س)}}{[\text{ر(س)}]^{2}}$ ، ر (س) $\neq$ ٠

**إذا كانت** ص = د(ع) قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى ع، ع = ر (س) قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س ،

**فإن** ص = د [ر (س)] تكون قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س

**ويكون :** $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$ [ قاعدة السلسلة ]

**أى إن :** $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ د [ ر(س)] = د/ [ ر(س) ] • ر/(س)

**إذا كانت** د دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س ، ن عددًا حقيقيًّا

**فإن :** $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ [د (س) ]$^{\text{ن}}$ = ن [د(س)]$^{\text{ن-١}}$ $\times$ د/(س)

**أى إن** إذا كانت ص = د(س) **فإن** $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{ص})^{\text{ن}} = \text{ن ص}^{\text{ن-١}}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

**تعلم**

**١ - مشتقة دالة ظل التمام**

إذا كانت ص = ظتا س حيث س $\in$ ع ، س $\neq$ ن$\pi$ ، ن $\in$ ص

فإن : $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (ظتا س ) = - قتا$^{2}$ س

**لاحظ أن :**

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\frac{١}{\text{ظا س}}\right) = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left[\frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}}\right]$

$= \frac{\text{جا س} \times -\text{جا س} - \text{جتا س} \times \text{جتا س}}{(\text{جا س})^{2}} = -\frac{١}{(\text{جاس})^{2}} = -\text{قتا}^{2}\text{س}$

ص = ظتا س

**٢ - مشتقة دالة القاطع**

إذا كانت ص = قا س حيث :

س$\in$ ع ، س $\neq \frac{(٢ن + ١)\pi}{٢}$ ، ن $\in$ ص

**فإن:**

$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ ( قاس ) = قا س ظا س ( تحقق من ذلك )

ص = قا س

٥ كتاب الطالب – الصف الثالث الثانوى

## التقييم المستمر (المناقشة والحوار):

⌑ ناقش مع طلابك ما ورد فى بند حاول أن تحل ص (٦) ، ص (٧) وتوصل معهم إلى الأجابات الصحيحة.

### حلول: حاول أن تحل (١) ص (٦)

أ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٢ جتا س} + \text{٣ قتا}^{٢}\text{س}$

ب $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{- جا س} + \text{٤ قا س ظا س}$

ج $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قا س} \times \text{قا}^{٢}\text{س} + \text{ظا س قا س ظا س}$

$= \text{قا س [قا}^{٢}\text{س} + \text{ظا}^{٢}\text{س]}$

د $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قتا س} \times \text{- قتا}^{٢}\text{س} + \text{ظتا س} \times \text{-قتا س ظتا س}$

$= \text{- قتا س [قتا}^{٢}\text{س} + \text{ظتا}^{٢}\text{س]}$

هـ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{(١ + قا س) قاس ظا س - قا س قاس ظا س}}{\text{(١ + قا س)}^{٢}}$

$= \frac{\text{قاس ظا س (١ + قا س - قا س)}}{\text{(١ + قا س)}^{٢}}$

$= \frac{\text{قاس ظا س}}{\text{(١ + قا س)}^{٢}}$

و $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{(١ + قتا س) (+ قتا س ظتا س) - (١ - قتا س)} \times \text{-قتا س ظتا س}}{\text{(١ + قتا س)}^{٢}}$

$= \frac{\text{قتاس ظتاس (١+ قتا س + قتا س)}}{\text{(١ + قتا س)}^{٢}}$

$= \frac{\text{قتاس ظتا س (١+ ٢ قتا س)}}{\text{(١ + قتا س)}^{٢}}$

### حاول أن تحل (٢) ص (٧)

أ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{- قتا}^{٢}\text{(س}^{٢} + \text{٣)} \times \text{٢س}$

ب $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قا}\sqrt{\text{س - ٢}} \times \text{ظا}\sqrt{\text{س - ٢}} \times \frac{\text{١}}{\text{٢}\sqrt{\text{س - ٢}}}$

ج $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{جتا (قتا٣س}^{٢}\text{)} \times \text{- قتا٣ س}^{٢}\text{ ظتا٣ س}^{٢} \times \text{٦س}$

د $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٦ قا ٢س ظا ٢س - ٦ قتا ٣ س ظتا ٣ س}$

هـ $\text{ص} = \text{قتا}^{٣}\text{ ٢س}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٣ قتا}^{٢}\text{ ٢س} \times \text{- قتا ٢س ظتا ٢س} \times \text{٢}$

$= \text{-٦ قتا}^{٣}\text{ ٢س ظتا ٢ س}$

و $= \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٢س قا}\frac{\text{١}}{\text{س}} + \text{س}^{٢} \times \text{قا}\frac{\text{١}}{\text{س}}\text{ ظا}\frac{\text{١}}{\text{س}} \times \frac{\text{-١}}{\text{س}^{٢}}$

$= \text{٢س قا}\frac{\text{١}}{\text{س}} \text{ - قا}\frac{\text{١}}{\text{س}}\text{ ظا}\frac{\text{١}}{\text{س}}$

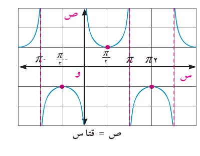


**٣ - مشتقة دالة قاطع التمام :**

إذا كانت ص = قتا س حيث

س ∈ ع ، س ≠ ن $\pi$ ، ن ∈ ص

فإن : $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\text{(قتا س)} = \text{- قتا س ظتا س}$ تحقق من ذلك




**مثال**

① أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ لكل مما يأتى:

أ ص = ٣ س$^{٥}$ + ٤ ظتا س

ب ص = ٣ قا س - ٥ ظا س

ج ص = س$^{٣}$ قتا س

د ص = $\frac{\text{١ - ظتا س}}{\text{١ + ظتا س}}$

**الحل**

أ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٣} \times \text{٥س}^{٤} + \text{٤ (- قتا}^{٢}\text{س)} = \text{١٥ س}^{٤}\text{ - ٤ قتا}^{٢}\text{س}$

ب $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٣ (قا س ظا س) - ٥ قا}^{٢}\text{س} = \text{قاس [٣ ظا س - ٥ قا س]}$

ج $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٣ س}^{٢}\text{ قتا س} + \text{س}^{٣}\text{ (- قتا س ظتا س)} = \text{س}^{٢}\text{ قتاس [٣ - س ظتا س]}$

د $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{(١ + ظتا س) (قتا}^{٢}\text{س) - (١ - ظتاس) (- قتا}^{٢}\text{س)}}{\text{(١ + ظتا س)}^{٢}}$

$= \frac{\text{قتا}^{٢}\text{س[١ + ظتا س + ١ - ظتا س]}}{\text{(١ + ظتا س)}^{٢}} = \frac{\text{٢ قتا}^{٢}\text{س}}{\text{(١ + ظتا س)}^{٢}}$

**حاول أن تحل**

① أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ إذا كانت ص تساوى:

أ ٢ جا س - ٣ ظتا س

ب جتا س + ٤ قا س

ج قا س طا س

د قتا س ظتا س

هـ $\frac{\text{قا س}}{\text{١ + قا س}}$

و $\frac{\text{١ - قتا س}}{\text{١ + قتا س}}$

**مثال**

② أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ لكل مما يأتى:

أ ص = قا (٥ س + ٢)

ب ص = ظتا ( جتا ٣ س)

ج ص = قتا$^{٢}$ (١ + ٣س$^{٢}$)

د ص = (٣ - ٢ ظتا س)$^{٣}$





**الحل**

أ ∵ ص = قا ( ٥ س + ٢) بوضع ع = ٥ س + ٢ ∴ $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \text{٥}$

ويكون ص = قا ع حيث $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = \text{قا ع طا ع}$

∵ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$ [قاعدة السلسلة]

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قاع طاع} \times \text{٥} = \text{٥ قا (٥ س + ٢) طا (٥ س + ٢)}$

**حل آخر:**

∵ $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\text{ د[ر(س)]} = \text{د}'\text{[ر(س)]} \times \text{ر}'\text{(س)}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قا(٥س + ٢) ظا (٥ س + ٢)} \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\text{ (٥ س + ٢)}$

$= \text{٥ قا ( ٥ س + ٢) ظا ( ٥ س + ٢)}$

ب ص = ظتا ( جتا ٣ س)

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{- قتا}^{٢}\text{( جتا ٣ س)} \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\text{ (جتا ٣ س)}$

$= \text{- قتا}^{٢}\text{ ( جتا ٣ س )} \times \text{[ - جا ٣ س} \times \text{٣]} = \text{٣ جا ٣ س قتا}^{٢}\text{ ( جتا ٣ س)}$

ج ص = قتا$^{٢}$ ( ١ + ٣س$^{٢}$)

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٢ قتا (١ + ٣س}^{٢}\text{)} \times \text{- قتا ( ١ + ٣س}^{٢}\text{) ظتا ( ١ + ٣ س}^{٢}\text{)} \times \text{٦ س}$

$= \text{- ١٢س ظتا (١ + ٣س}^{٢}\text{) قتا}^{٢}\text{ (١ + ٣ س}^{٢}\text{)}$

د ص = (٣ - ٢ ظتا س)$^{٣}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٣ (٣ - ٢ ظتا س)}^{٢} \times \text{- ٢ (- قتا}^{٢}\text{ س)} = \text{٦ قتا}^{٢}\text{ س (٣ - ٢ ظتا س)}^{٢}$

**حاول أن تحل**

② أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ إذا كانت ص تساوى:

أ ظتا ( س$^{٢}$ + ٣)

ب قا$\sqrt{\text{س - ٢}}$

ج جا (قتا ٣ س$^{٢}$)

د ٣ قا ٢ س + ٢ قتا ٣ س

هـ - قتا$^{٣}$ (٢ س + $\pi$)

و س$^{٢}$ قا $\frac{\text{١}}{\text{س}}$

## تمــاريـن الدرس (١ - ١)

إذا كانت د ، ر ، ق دوال قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س، أكمل ما يأتي:
باستخدام القيم المعطاه فى الجدول المقابل:

| س | ١ | ٢ |
|---|---|---|
| د(س) | -١ | ٤ |
| ر(س) | ٢ | ١ |
| د/(س) | ١ | ٥ |
| ر/(س) | ٢ | -٣ |

① ق (س) = ٣ د(س) - ٢ ر(س) فإن ق/(١) = ..........

② ق (س) = د(س) [٥ + ر (س)] فإن ق/(٢) = ..........

③ ق (س) = د(س) ÷ [ر (س) + ٢] فإن ق/(١) = ..........

④ ق (س) = د[ر (س)] فإن ق/(١) = ..........

⑤ ق (س) = ر [٣ س - د(س)] فإن ق/(٢) = ..........

⑥ ق (س) = $[\text{س}^{٣} + \text{ر (س)}]^{-٢}$ فإن ق/(١) = ..........

أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ لكل مما يأتي:

⑦ ص = س٣ - ٢ قا س ⑧ ص = قتا (٢ - ٣س) ⑨ ص = ظتا $(\pi - \frac{١}{\text{س}})$

⑩ ص = ظا (ظتا س) ⑪ ص = $(١ + \text{ظتا س})^{٢}$ ⑫ ص = قتا ($\pi$ - ٢س)

⑬ ص = جتا ٢ س - ٥ ظتا ٣ س ⑭ ص = طا ٣ س - قتا ٢ س ⑮ ص = $\text{جا}^{٢}$ ٣س + $\text{قا}^{٢}$ س .

⑯ ص = قا س طا ٢ س ⑰ ص = ظتا ٣ $\sqrt{\text{س}}$ ⑱ ص = $\text{قتا}^{٢}(١ + \text{س}^{٢})$

⑲ ص = ٣$\text{قا}^{٢}$ (٢ س + $\pi$) ⑳ ص = $\sqrt{١ + \text{قتا س}}$ ㉑ ص = $\text{س}^{٢}$ ظتا ٣ س

㉒ ص = $(\text{قتا س} + \text{ظتا س})^{-١}$ ㉓ ص = $\frac{\text{ظتا ٣ س}}{\text{٢ س + ٣}}$ ㉔ ص = $\frac{\text{١ - قا س}}{\text{١ + قا س}}$

أجب عمَّا يأتي:

㉕ إذا كانت ص = ظتا $\frac{\pi \text{ع}}{٦}$ ، ع = ٣ $\sqrt{\text{س}}$ أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عند س = ١

㉖ إذا كانت ص = $\sqrt{٥ - ٢\text{ع}}$ ، ع = قا ٢ س أثبت أن $\sqrt{٣}$ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ + ١٢ = ٠ عند س = $\frac{\pi}{٦}$

㉗ أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث ص = د(س) لكل مما يأتي:

أ ص = ٢ ظتا س + $\sqrt{٢}$ قا س عند س = $\frac{\pi}{٤}$

ب ص = ٣ طا س - $\text{قتا}^{٢}$ س عند س = $\frac{٣\pi}{٤}$



## حلول تمارين الدرس (١-١)

① ق/(١) = -١ ② ق/(٢) = ١٨

③ ق/(١) = $\frac{٣}{٨}$ ④ ق/(١) = ١٠

⑤ ق/(٢) = ٦ ⑥ ق/(١) = $\frac{-١٠}{٢٧}$

⑧ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = - قتا (٢-٣س) ظتا (٢ - ٣س) × -٣

⑨ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = - $\text{قتا}^{٢}$ $\frac{-١}{\text{س}}$ × $\frac{١}{\text{س}^{٢}}$ = $\frac{-١}{\text{س}^{٢}}$ $\text{قتا}^{٢}$ $\frac{-١}{\text{س}}$

⑩ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\text{قا}^{٢}$ (ظتا س) × - $\text{قتا}^{٢}$ س

⑫ ص = قتا ٢س ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = - قتا ٢س ظتا ٢ س × ٢

⑬ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = -٢ جا ٢ س + ١٥ $\text{قتا}^{٢}$ ٣ س

⑭ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣ $\text{قا}^{٢}$ ٣س + ٢ قتا ٢ س ظتا ٢ س

⑯ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = قا س ظا س ظا٢س + قا س × $\text{قا}^{٢}$ ٢س × ٢

= قا س (ظاس ظا٢س + ٢ $\text{قا}^{٢}$ ٢س)

⑰ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣ $\text{ظتا}^{٢}$ $\sqrt{\text{س}}$ × - قتا $\sqrt{\text{س}}$ ظتا $\sqrt{\text{س}}$ × $\frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$

⑱ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢ قتا (١ + $\text{س}^{٢}$) × - قتا (١ + $\text{س}^{٢}$) ظتا (١ + $\text{س}^{٢}$) × ٢س

⑲ ص = ٣$\text{قا}^{٢}$ ٢س ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٦ قا ٢ س قا ٢س ظا ٢س × ٢

= ١٢ $\text{قا}^{٢}$ ٢س ظا ٢س

⑳ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{- قتا س ظتا س}}{٢\sqrt{\text{١ + قتا س}}}$

㉑ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢س ظتا ٣س - ٣ $\text{س}^{٢}$ $\text{قتا}^{٢}$ ٣ س

㉓ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{- (٢ س +٣) ٣}\text{قتا}^{٢}\text{ ٣س - ٢ ظتا ٣س}}{(\text{٢س + ٣})^{٢}}$

= $\frac{\text{- ٦س }\text{قتا}^{٢}\text{ ٣س - ٩}\text{قتا}^{٢}\text{ ٣س - ٢ ظتا ٣ س}}{(\text{٢س + ٣})^{٢}}$

㉔ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{(١ + قا س) (- قاس ظا س) - (١ - قاس) (قاس ظاس)}}{(\text{١ + قاس})^{٢}}$

= $\frac{\text{- ٢ قا س ظا س}}{(\text{١ + قاس})^{٢}}$

㉕ ص = ظتا $\frac{\pi}{٦}$ × ٣ $\sqrt{\text{س}}$ س = ظتا $\frac{\pi}{٢}$ $\sqrt{\text{س}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = - $\text{قتا}^{٢}$ $\frac{\pi}{٢}$ $\sqrt{\text{س}}$ × $\frac{\pi}{٤\sqrt{\text{س}}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = - $\text{قتا}^{٢}$ $\frac{\pi}{٢}$ × $\frac{\pi}{٤}$ = $\frac{-\pi}{٢}$

㉖ ص = $\sqrt{\text{٥ - ٢ قا ٢س}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{-٢ × ٢ قا ٢س ظا ٢س}}{٢\sqrt{\text{٥ - ٢ قا ٢ س}}}$

= $\frac{\text{-٤قا } \frac{\pi}{٣} \text{ ظا } \frac{\pi}{٣}}{٣\sqrt{\text{٥ - ٢قا } \frac{\pi}{٣}}}$ = $\frac{٤ \times ٢ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}}{٢ \times ١}$ = - ٢ $\sqrt{٣}$

㉗ أ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = -٢ $\text{قتا}^{٢}$ س + $\sqrt{٢}$ قا س ظا س

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = -٢$\text{قتا}^{٢}$ $\frac{\pi}{٤}$ + $\sqrt{٢}$ قا $\frac{\pi}{٤}$ ظا $\frac{\pi}{٤}$ س = $\frac{\pi}{٤}$

= -٢ × ٢ + $\sqrt{٢}$ × $\sqrt{٢}$ × ١ = -٤ + ٢ = -٢

ب $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣$\text{قا}^{٢}$س + ٢ قتاس قتاس ظتا س

= ٣ $\text{قا}^{٢}$ $\frac{٣\pi}{٤}$ + ٢ قتا $\frac{٣\pi}{٤}$ قتا $\frac{٣\pi}{٤}$ ظتا $\frac{٣\pi}{٤}$

= ٣ × ٢ + ٢ × $\sqrt{٢}$ × $\sqrt{٢}$ × ١ = ١٠



# ١ - ٢ الاشتقاق الضمنى والبارامترى

**Implicit and parametric Defferentiation**

**سوف تتعلم**
- الاشتقاق الضمنى
- الاشتقاق البارامترى

**المصطلحات الأساسية**
- علاقة *Relation*
- دالة صريحة *Explicit function*
- دالة ضمنية *Implicit function*
- وسيط *Parameter*

**الأدوات المستخدمة**
- آلة حاسبة علمية. *Scientific calculator*

**الاشتقاق الضمنى** *Implicit Defferentiation*

سبق لك إيجاد مشتقة دالة معرفة بالصورة ص = د(س) وهى دالة صريحة explicit function للمتغير المستقل س حيث تحدد قيمة ص مباشرة متى علم قيمة س مثل :

$ص = ٤س^{٣} - ٥س + ٢$ ، ص = جا (٢ س + ٣) ، $ص = \frac{س + ١}{س - ١}$ ، ...

ويكون $ص' = ١٢ س^{٢} - ٥$ ، $ص' = ٢$ جتا (٢ س + ٣) ، $ص' =$ ..........

أما إذا كانت ص مرتبطة بالمتغير س بمعادلة تحوى س ، ص معًا مثل:

س ص + ص - ٤ = ٠ (١)، $س^{٢} + ص^{٢} - ٩ = ٠$ (٢)

فكل معادلة تعرف علاقة ضمنية implicit relation بين س ، ص؛ تعبر عن العلاقة بين إحداثيي نقطة (س ، ص) واقعة على منحناها البياني.

**لاحظ أن :**

**١-** يمكن كتابة المعادلة س ص + ص - ٤ = ٠ بالصورة:

ص (س + ١) = ٤ ∴ $ص = \frac{٤}{س + ١}$ حيث س ≠ -١

وفى هذه الحالة تعرف العلاقة الضمنية دالة واحدة صريحة.

**٢-** مجموعة النقط (س ، ص) التى تحقق المعادلة $س^{٢} + ص^{٢} = ٩$ ترسم دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٣ وحدات، ومن اختبار الخط الرأسى نلاحظ أن العلاقة $س^{٢} + ص^{٢} = ٩$ لا تمثل دالة غير أن $ص^{٢} = ٩ - س^{٢}$

∴ $ص = \pm\sqrt{٩ - س^{٢}}$

فيمكن أن تعرِفُ العلاقة الضمنية $س^{٢} + ص^{٢} = ٩$ دالتين صريحتين الأولى $ص = \sqrt{٩ - س^{٢}}$ مجالها [-٣ ، ٣] ومداها [٠ ، ٣] وقابلة للاشتقاق لكل س ∈ ]-٣ ، ٣[



كتاب الطالب - الصف الثالث الثانوى

٩

كتاب الطالب من ص ( ٩ ) إلى ص ( ١٣ ) الشبكة الدولية للمعلومات.

## تهيئة:

ابدء الدرس بتوضيح مفهوم الدالة الصريحة وهى التى تحدد قيمة لـ ص مباشرة متى علمت قيمة س ، العلاقة الضمنية وهى علاقة بين س ، ص يصعب فيها أو ربما يستحيل فيها حل المعادلة لإيجاد قيمة ص بدلالة س.

- أعط بعض الأمثلة واطلب إلى الطلاب توضيح الدوال الصريحة فيها والعلاقات الضمنية.
- تسمى الطريقة التى توجد بها المشتقة دون إعادة كتابة الدالة كدالة صريحة فى المتغير س بالاشتقاق الضمنى.

## أخطاء شائعة:

يخطأ بعض الطلاب فى تسمية العلاقة الضمنية بالدالة الضمنية حيث أن معظم العلاقات الضمنية تحتوى على أكثر من دالة صريحة كما هو معطى فى الأمثلة ص (٩).

## خلفية:

**يتناول هذا الدرس شقين أساسيين:**

**أولهما: الأشتقاق الضمنى:**

حيث نجد أنه فى كثير من المعادلات يصعب فيها التعبير عن ص بدلالة س مباشرة لأن المتغير ص لا يمثل دالة صريحة بالنسبة إلى س وتسمى هذه الدالة غير الصريحة بالدالة الضمنية، لذلك يتطلب الأشتقاق الضمنى أن توجد مشتقة كل من طرفى المعادلة بالنسبة إلى أحد المتغيرين س أ ، ص وفقًا لقاعدة السلسلة.

**ثانيهما: الأشتقاق البارامترى** وهو التعبير عن كل من الأحداثى السينى والصادى للنقطة (س ، ص) أن أمكن بدالة فى متغير ثالث وليكن ن يسمى بالبارامتر.

## مخرجات التعلم:

**فى نهاية هذا الدرس وتنفيذ الأنشطة المبنية من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على :**

١- التعرف على الأشتقاق الضمنى و إيجاد المشتقة.

٢- التعرف على الأشتقاق البارامترى و إيجاد المشتقة.

## مفردات أساسية:

علاقة- دالة صريحة- دالة ضمنية- وسيط (بارامتر).

## المواد التعليمية المستخدمة:

السبورة التعليمية - طباشير ملون- جهاز عرض فوق رأسى - شفافيات- آلة حاسبة علمية- برامج رسومية للحاسوب.

## طرق التدريس المقترحة:

العرض المباشر - المناقشة - العصف الذهنى - حل المشكلات.

## مكان التدريس:

الفصل الدراسى - غرفة الحاسب الآلى (الوسائل المتعددة)

## مصادر التعلم:

## التقييم المستمر: (الحوار والمناقشة)

**ناقش مع طلابك ما ورد فى بند حاول أن تحل وتوصل معهم إلى الأجابات الصحيحة.**

### حلول: حاول أن تحل (١)

أ) $٣س^٢ - ٥ص - ٥س \frac{ءص}{ءس} + ٣ص^٢ \frac{ءص}{ءس} = ٤$

$\frac{ءص}{ءس} (٣ص^٢ - ٥س) = ٤ - ٣س^٢ + ٥ص$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{٤ - ٣س^٢ + ٥ص}{٣ص^٢ - ٥س}$

ب) $س^٢ \frac{ءص}{ءس} + ٢س ص + ٢ص \frac{ءص}{ءس} س + ص^٢ = ٠$

$\frac{ءص}{ءس} (س^٢ + ٢ص) = -٢س ص - ص^٢$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{-٢س ص + ص^٢}{س^٢ + ٢ص}$

### حاول أن تحل (٢)

أ) $جتا ص + س \times - جا ص \frac{ءص}{ءس} + \frac{ءص}{ءس} جتا س$

$- ص جا س = صفر$

$\frac{ءص}{ءس} (- س جا ص + جتا س) = ص جا س - جتا ص$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ص جاس - جتا س}{- س جا ص + جتا س}$

### تمارين أثرائية للطالب

أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ فى كل مما يأتى:

(١) $س^٢ + ص^٢ = س + ص$

(٢) $س^٢ ص = ٤س + ١$

(٣) $٢س^٣ + س^٢ ص = ١ - ص^٣$

(٤) $\sqrt{س} + \sqrt{ص} = ١٠٠$

(٥) $(ص + ١)^٥ = ٣س + ٣$

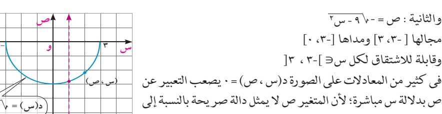
(٦) $\frac{١}{س} + \frac{١}{ص} = ٢$

(٧) $س^٢ + \sqrt{س ص} = ٧$

(٨) $ص^{\frac{٢}{٣}} + س^{\frac{٢}{٣}} = ٩$

(٩) $ص = \sqrt{٣س^٢ + ٧}$

(١٠) $ص = \sqrt[٣]{٥ س - ٣}$




والثانية : $ص = -\sqrt{٩ - س^٢}$

مجالها [ -٣، ٣] ومداها [-٣، ٠]

وقابلة للاشتقاق لكل $س \in ]-٣ ، ٣[$

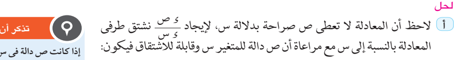
فى كثير من المعادلات على الصورة د(س ، ص) = ٠ يصعب التعبير عن ص بدلالة س مباشرة؛ لأن المتغير ص لا يمثل دالة صريحة بالنسبة إلى س ، تسمى هذه الدالة غير الصريحة بالدالة الضمنية implicit function عملية اشتقاق الدالة الضمنية (الاشتقاق الضمنى) يتطلب اشتقاق كل من طرفى المعادلة بالنسبة إلى أحد المتغيرين س أو ص وفقًا لقاعدة السلسلة لتحصل على $\frac{ءص}{ءس}$ أو $\frac{ءس}{ءص}$ على الترتيب.

**مثال**

(١) أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ إذا كان:

أ) $س^٣ + ص^٢ - ٧س + ٥ص = ٨$   ب) $٣س ص + ص^٢ = س^٢ - ٧$

**الحل**



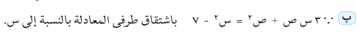
أ) لاحظ أن المعادلة لا تعطى ص صراحة بدلالة س، لإيجاد $\frac{ءص}{ءس}$ نشتق طرفى المعادلة بالنسبة إلى س مع مراعاة أن ص دالة للمتغير س وقابلة للاشتقاق فيكون:

$٣س^٢ + ٢ص \frac{ءص}{ءس} - ٧ + ٥ \frac{ءص}{ءس} = ٠$

$\frac{ءص}{ءس} (٢ص + ٥) = ٧ - ٣س^٢$   $\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{٧ - ٣س^٢}{٢ص + ٥}$

**تذكر أن**

إذا كانت ص دالة فى س وقابلة للاشتقاق فإن: $\frac{ء}{ءس}(ص)^ن = ن ص^{ن-١} \frac{ءص}{ءس}$



ب) $\because ٣س ص + ص^٢ = س^٢ - ٧$ باشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة إلى س.

$\therefore \frac{ء}{ءس}(٣س ص) + ٢ص \frac{ءص}{ءس} = ٢س$

$٣س \frac{ءص}{ءس} + ص \times ٣ + ٢ص \frac{ءص}{ءس} = ٢س$

$\frac{ءص}{ءس} [٣س + ٢ص] = ٢س - ٣ص$   $\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{٢س - ٣ص}{٣س + ٢ص}$

**حاول أن تحل**

(١) أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ إذا كان:

أ) $س^٣ - ٥س ص + ص^٣ = ٤س$   ب) $س^٢ ص + ص^٢ س = ٢٥$

**مثال**

(٢) أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ إذا كان:

أ) $جا ٢ص = ص جتا ٣س$   ب) $ظا ٢س + ظتا ص = س ص$







**الحل**

أ) باشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة إلى س

$\therefore \frac{ء}{ءس}(جا ٢ص) = \frac{ء}{ءس}(ص جتا ٣س)$

$جتا ٢ص \times ٢ \frac{ءص}{ءس} = ص [- جا ٣س \times ٣] + جتا ٣س [\frac{ءص}{ءس}]$

$\frac{ءص}{ءس} [٢ جتا ٢ص - جتا ٣س] = - ٣ص جا ٣س$   $\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{٣ص جا ٣س}{جتا ٣س - ٢ جتا ٢ص}$

ب) باشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة إلى س

$\frac{ء}{ءس}(ظا ٢س) + \frac{ء}{ءس}(ظتا ص) = \frac{ء}{ءس}(س ص)$

$٢ قا^٢ ٢س - قتا^٢ ص \frac{ءص}{ءس} = س \frac{ءص}{ءس} + ص$

$\frac{ءص}{ءس} [س + قتا^٢ ص] = ٢قا^٢ ٢س - ص$   $\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{٢قا^٢ ٢س - ص}{س + قتا^٢ ص}$

**حاول أن تحل**

(٢) أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ إذا كان:

أ) $س جتا ص + ص جتا س = ١$   ب) $٣ص = جا س جتا ٢ص$

**لاحظ أن:** الصيغة النهائية للمشتقة $\frac{ءص}{ءس}$ فى الاشتقاق الضمنى تحوى كلًّا من س ، ص مما يجعل حسابها شاقًّا عند إحدى قيم س لحاجتنا أولاً لمعرفة قيمة ص المناظرة لها والتى يصعب تحديدها من العلاقة الضمنية.

**الاشتقاق البارامترى** *parametric Defferentiation*

إذا أمكن التعبير عن كل من الإحداثى السينى ، والاحداثى الصادى للنقطة (س ، ص) كدالة فى متغير ثالث ن (يسمى الوسيط أو البارامتر) بالمعادلتين:

س = د(ن) ، ص = ر(ن) حيث د ، ر لهما نفس المجال

فإن المعادلتين معًا تمثلان معادلة لمنحنى واحد معبرًا عنه بالصورة البارامترية

**تعلم**

للمنحنى المعطى على الصورة البارامترية س = د(ن) ، ص = ر(ن)

يكون $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءن} \times \frac{ءن}{ءس} = \frac{ءص}{ءن} \div \frac{ءس}{ءن}$ حيث د ، ر دالتان قابلتان للاشتقاق بالنسبة إلى ن.

**مثال**

(٣) أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ للمنحنيات الآتية عند القيم المعطاة:

أ) $س = ٥ن + ٣ ، ص = ١٦ن^٢ + ٩$ ، ن = ٥   ب) $س = ٣ جتا ٢\theta ، ص = ٤ جا ٣\theta$ ، $\theta = \frac{\pi}{٤}$

## التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

**ناقش مع طلابك ما ورد فى بند حاول أن تحل وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة.**

### الحلول: حاول أن تحل (٣)

أ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = ٢\text{ن} + ٥$ ،

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = ٣\text{ن}^٢ - ٤\text{ن} + ١$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} \div \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = \frac{٨}{٣}$

ب $\frac{\text{ءس}}{\text{ء}\theta} = ٢ \text{ قا}\,\theta \times \text{قا}\,\theta \;\; \text{ظا}\,\theta$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ء}\theta} = \text{قا}^٢\theta$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ء}\theta} \div \frac{\text{ءس}}{\text{ء}\theta} = \frac{\text{قا}^٢\theta}{٢ \text{ قا}^٢\theta \;\; \text{ظا}\,\theta}$

$= \frac{١}{٢ \text{ ظا}\,\theta}$ عند $\theta = \frac{-٣\pi}{٤}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{٢ \text{ ظا} \frac{-٣\pi}{٤}} = \frac{١}{٢}$ .

ج $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = \frac{٣}{٢\sqrt{٣\text{ن} - ٢}}$ ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \frac{٤}{٢\sqrt{٤\text{ن} + ١}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٤ \times ٢\sqrt{٣\text{ن} - ٢}}{٢ \times ٣\sqrt{٤\text{ن} + ١}}$ عند ن = ٢

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٤ \times ٢}{٣ \times ٣} = \frac{٨}{٩}$

### حاول أن تحل (٤)

أ $= \sqrt{\text{س}^٢ - ١}$

ب $= \frac{٢}{٣}$

ج $٢ - \sqrt{٣}$

الاشتقاق وتطبيقاته

الحل

أ $\text{س} = ٥\text{ن} + ٣$ ، $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = ٥$ ، $\text{ص} = ١٦\text{ن}^٢ + ٩$ ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = ٣٢\text{ن}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} \times \frac{\text{ءن}}{\text{ءس}} = \frac{٣٢\text{ن}}{٥}$ ويكون $\left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right]_{\text{ن}=٥} = ٣٢$

ب $\text{س} = ٣ \text{ جتا } ٢\theta$ ، $\frac{\text{ءس}}{\text{ء}\theta} = ٣ \times -\text{جا } ٢\theta \times ٢ = -٦ \text{ جا } ٢\theta$

$\text{ص} = ٤ \text{ جا } ٣\theta$ ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ء}\theta} = ٤ \times \text{جتا } ٣\theta \times ٣ = ١٢ \text{ جتا } ٣\theta$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ء}\theta} \times \frac{\text{ء}\theta}{\text{ءس}} = \frac{١٢ \text{ جتا } ٣\theta}{-٦ \text{ جا } ٢\theta} = \frac{-٢ \text{ جتا } ٣\theta}{\text{جا } ٢\theta}$

عند $\theta = \frac{\pi}{٤}$ فإن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-٢ \text{ جتا } \frac{٣\pi}{٤}}{\text{جا } \frac{\pi}{٢}} = -٢ \times \frac{-١}{\sqrt{٢}} = \sqrt{٢}$

حاول أن تحل

٣ أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ للمنحنيات الآتية عند القيم المعطاة

أ $\text{س} = (\text{ن} + ٧)(\text{ن} - ٢)$ ، $\text{ص} = (\text{ن}^٢ + ١)(\text{ن} - ٢)$ ، ن = -١.

ب $\text{س} = \text{قا}^٢\theta - ١$ ، $\text{ص} = \text{ظا}\,\theta$ ، $\theta = \frac{-٣\pi}{٤}$ ج $\text{س} = \sqrt{٣\text{ن} - ٢}$ ، $\text{ص} = \sqrt{٤\text{ن} + ١}$ ، ن = ٢

تفكير ناقد: أوجد قيمة البارامتر ن التى يكون عندها للمنحنى

$\text{س} = ٢\text{ن}^٣ - ٥\text{ن}^٢ - ٤\text{ن} + ١٢$ ، $\text{ص} = ٢\text{ن}^٢ + \text{ن} - ٤$ مماس أفقى وآخر رأسى.



مثال

٤ أوجد مشتقة $(٤\text{س}^٣ - ٩\text{س}^٢ + ٥)$ بالنسبة إلى $(٣\text{س}^٢ + ٧)$

الحل

بوضع $\text{ص} = ٤\text{س}^٣ - ٩\text{س}^٢ + ٥$ ، $\text{ع} = ٣\text{س}^٢ + ٧$ فتكون ص = د(س)، ع = ر(س)

الدالتان د، ر قابلتان للاشتقاق بالنسبة إلى س باعتبار س بارامتر لكل من المتغيرين ص ، ع

∴ من الاشتقاق البارامترى نجد أن:

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ص}'}{\text{ع}'} = \frac{١٢\text{س}^٢ - ١٨\text{س}}{٦\text{س}} = ٢\text{س} - ٣$ أى أن $\frac{\text{ء}}{\text{ء}(٣\text{س}^٢+٧)}\left[٤\text{س}^٣ - ٩\text{س}^٢ + ٥\right] = ٢\text{س} - ٣$

حاول أن تحل

٤ باستخدام الاشتقاق البارامترى أوجد:

أ مشتقة $\text{س}^٢ + ١$ بالنسبة إلى $\sqrt{\text{س}^٢ - ١}$

ب مشتقة $\sqrt{٨ + \text{س}^٢}$ بالنسبة إلى $\frac{\text{س}}{\text{س} + ١}$ عند س = ١

ج مشتقة س - جا س بالنسبة إلى ١ - جتا س عند $\text{س} = \frac{\pi}{٣}$

تمـــاريــن الدرس (١ - ٢)

**أولًا: أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:**

(١) إذا كانت س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ = ١ فإن $\frac{دص}{دس}$ يساوى:

أ) س  ب) $\frac{١}{ص}$  ج) - $\frac{س}{ص}$  د) - $\frac{ص}{س}$

(٢) إذا كانت س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ = ٢ س ص فإن $\frac{دص}{دس}$ يساوى:

أ) - ١  ب) صفر  ج) ١  د) ٢

(٣) إذا كانت ص$^{٢}$ - ٢ $\sqrt{س}$ = ٠ فإن $\frac{دص}{دس}$ يساوى:

أ) $\frac{٢ص}{\sqrt{س}}$  ب) $\sqrt{س}$  ج) $\frac{س}{ص^{٢}}$  د) $\frac{١}{ص^{٣}}$

(٤) إذا كان س = ٢ن$^{٢}$ + ٣ ، ص = $\sqrt{ن^{٣}}$ ، ن = ١ فإن $\frac{دص}{دس}$ يساوى:

أ) $\frac{٣}{٨}$  ب) $\frac{٣}{٤}$  ج) ٢  د) ٦

(٥) ميل المماس للمنحنى س ص$^{٢}$ = ٣ عند النقطة (٣ ، ١) يساوى:

أ) - ٣  ب) - $\frac{١}{٦}$  ج) $\frac{١}{٣}$  د) $\frac{٣}{٢}$

**ثانيًا: أوجد $\frac{دص}{دس}$ في كل مما يأتى:**

(٦) س$^{٢}$ - ٤ص$^{٢}$ + ٧ = ٠  (٧) س$^{٤}$ + ٣ص$^{٤}$ - ٢ = ٠  (٨) س$^{٢}$ - ٢ س ص = ٥ - ص$^{٢}$

(٩) س$^{٣}$ + ٦ س ص = ٤ ص + ٣  (١٠) $\frac{س}{ص}$ + $\frac{ص}{س}$ = ١  (١١) س ص + جا ص = ٥

(١٢) س جا ص + ص جتا س = ٠  (١٣) س قتا ص = ص ظتا س  (١٤) س$^{٢}$ جا ص - ص$^{٢}$ جا س = ٩

(١٥) جا٢ س جتا ٢ ص = $\frac{٣}{٤}$

**ثالثًا: أوجد $\frac{دص}{دس}$ للمنحنيات الآتية عند القيم المعطاة:**

(١٦) س = ١٣ - ٢ ن ، ص = ٤ ن$^{٢}$ - $\sqrt{ن}$ ، ن = ٤

(١٧) س = جا ٢ $\pi\theta$ ، ص = جتا ٢ $\pi\theta$ ، $\theta = \frac{١}{٦}$

(١٨) س = ٥ + قا$^{٢}$ ٣ $\theta$ ، ص = ١ - ظا ٣ $\theta$ ، $\theta = \frac{\pi}{٤}$

(١٩) أوجد ميل المماس للمنحنى جتا $\sqrt{\pi ص}$ = ٣ س + ١ عند النقطة (- $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{\pi}{٤}$)

(٢٠) أوجد مشتقة $\frac{س + ١}{س - ١}$ بالنسبة إلى $\sqrt{٢ س + ١}$ عند س = ٤

(٢١) أوجد قيمة البارامتر ن التى عندها يكون للمنحنى س = ٢ن$^{٣}$ - ٥ن$^{٢}$ + ٤ ن - ٩ ، ص = ٢ن$^{٢}$ + ن - ٥

أ) مماس رأسى.  ب) مماس أفقى.



## تمارين الدرس (١-٢)

### أولا: اختر

(١) جـ  (٢) جـ

(٣) د  (٤) أ

(٥) د

### ثانيا:

(٦) ٢س - ٨ ص ص′ = ٠  ∴ ص′ = $\frac{س}{٤ ص}$

(٧) ٤س$^{٣}$ + ١٢ ص$^{٣}$ ص′ = ٠  ص′ = $\frac{- س^{٣}}{٤ ص^{٣}}$

(٨) س$^{٢}$ - ٢ س ص + ص$^{٢}$ = ٥  ∴ (س - ص)$^{٢}$ = ٥

س - ص = $\sqrt{٥}$  ∴ $\frac{دص}{دس}$ = ١

(٩) ٣س$^{٢}$ + ٦س + ٦ س ص′ = ٤ص′

ص′(٤ - ٦س) = ٣س$^{٢}$ + ٦س

ص′ = $\frac{٣س^{٢} + ٦س}{٤ - ٦س}$ .

(١٠) س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ = س ص

٢س + ٢ص ص′ = س ص′ + ص

ص′ = $\frac{ص - ٢ س}{٢ ص - س}$

(١١) سص′ + ص + جتا ص ص′ = ٠  ص′ = $\frac{- ص}{س + جتا ص}$

(١٢) س جتا ص×ص′ + جا ص + ص′ جتا س + ص × -جا س = صفر

ص′(س جتا ص + جتا س) = ص جا س - جا ص

ص′ = $\frac{ص جا س - جا ص}{س جتا ص + جتا س}$

(١٣) قتا ص + س × - قتا ص ظتا ص ص′ = ص′ ظتا س + ص × - قتا$^{٢}$ س

ص′ = $\frac{قتا ص + ص قتا^{٢} س}{ظتا س + قتا ص ظتا ص}$

(١٤) ٢س جا ص + س$^{٢}$ جتا ص ص′ - ٢ ص ص′ جا س + ص$^{٢}$ جتا س = ٠

ص′ = $\frac{ص^{٢} جتا س + ٢ س جا ص}{٢ ص جا س + س^{٢} جتا ص}$

(١٥) ٢ جتا ٢س جتا ٢ ص - ٢جا ٢س جا٢ ص × ص′ = ٠

ص′ = $\frac{٢ جتا ٢ س جتا ٢ ص}{٢ جا ٢ س جا ٢ ص}$ = ظتا ٢س ظتا ٢ ص

### ثالثا:

(١٦) = - ١٥ $\frac{٧}{٨}$

(١٧) - $\sqrt{٣}$

(١٨) $\frac{-٣}{٢}$

(١٩) $\frac{-١}{٣}$

(٢٠) $\frac{-٢}{٣}$

(٢١) $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{٤ ن + ١}{٦ ن - ١٠ ن + ٤}$

مماس رأسى ∴ $\frac{دص}{دس}$ = ٠  ∴ ن = ١ أو $\frac{٢}{٣}$

مماس أفقى $\frac{دص}{دس}$ = ٠  ∴ ن = - $\frac{١}{٤}$



# ١ - ٣ المشتقات العليا للدولة

## Higher Derivatives of Fucntion

### خلفية:

نرمز للمشتقة الأولى للدالة د بالرمز د′، فإذا كان للدالة المشتقة مشتقة فنرمز لها بالرمز د″ وتسمى المشتقة الثانية للدالة د ، وهكذا فإن:

$د″(س) = \frac{ء}{ء س}[د′(س)] = \frac{ء}{ء س}[\frac{ء}{ء س}(د(س))]$ ويمكن أن نرمز لذلك بالرمز $\frac{ء^{٢}}{ء س^{٢}}$ ويقرأ « دال أثنين دال سين ٢»

وبنفس الطريقة فإن المشتقة الثالثة د‴ هى مشتقة المشتقة الثانية ويرمز لها بالرمز د‴(س)، $\frac{ء^{٣}}{ء س^{٣}}$ وعلى وجه العموم إذا كان ن عددًا صحيحًا موجبًا فإن $د^{(ن)}$ ترمز للمشتقة النونية للدالة د ويمكن إيجاد ذلك باشتقاق د بعدد ن من المرات.

وباستخدام رمز الأشتقاق فإن $د^{ن}(س) = \frac{ء^{ن}}{ء س^{ن}}(د(س))$

ويسمى العدد الصحيح ن رتبة المشتقة.

### مخرجات التعلم:

**فى نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:**

١- يوجد مشتقات ذات رتب أعلى للدالة.

٢- يحل تمارين على المشتقات العليا للدالة

### مفردات أساسية:

رتبة - مشتقة أولى - مشتقة ثانية - مشتقة ثالثة.

### المواد التعليمية المستخدمة:

العرض المباشر - المناقشة - العصف الذهنى - حل المشكلات.

مكان التدريس : الفصل الدراسى

### مصادر التعلم:

كتاب الطالب من ص (١٤) إلى ص (١٧)

### تهيئة:

⌑ إعط الطلاب دالة جبرية ذات مشتقة عليا ولتكن من الدرجة الخامسة واطلب إليهم إيجاد مشتقة الدالة ثم أطلب إليهم تكرار إيجاد المشتقة فى كل مرة.



١ - ٣ المشتقات العليا للدالة

Higher Derivatives of a Function

سوف تتعلم

إيجاد مشتقات ذات رتب أعلى للدالة.

المصطلحات الأساسية

رتبة Order

مشتقة Derivative

الأدوات المستخدمة

آلة حاسبة علمية Scientific calculator

فكر و ناقش

إذا كانت ص = د(س) حيث ص = $س^{٤} + ٥س^{٣} - ٢س + ٣$ أوجد مشتقة الدالة د،
هل يمكنك تكرار عملية الاشتقاق بالنسبة إلى س ؟ لماذا؟
هل تتوقف عملية الاشتقاق؟ فسر إجابتك.

تعلم

المشتقات ذات الرتب العليا (Higher - Order Derivative)

- إذا كانت ص = د(س) حيث د دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س فإن مشتقتها الأولى (First derivative) هى ص′ = $\frac{ء ص}{ء س}$ = د′(س) وتمثل دالة جديدة.
- وإذا كانت المشتقة الأولى قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س فإن مشتقتها $\frac{ء}{ء س}(\frac{ء ص}{ء س})$ تسمى المشتقة الثانية (Second Derivative) للدالة د وتمثل دالة أخرى ويُرمز لها بالرمز ص″ = $\frac{ء^{٢}ص}{ء س^{٢}}$ = د″ (س)
- بتكرار عملية الاشتقاق نحصل على المشتقة الثالثة (Third Derivative) للدالة د ونرمز لها بالرمز $\frac{ء^{٣}ص}{ء س^{٣}}$ ، ... وهكذا

تسمى المشتقات لدالة بدءًا من المشتقة الثانية بالمشتقات العليا، وتكتب المشتقة من الرتبة ن كما يلى :

$ص^{(ن)} = \frac{ء^{ن}ص}{ء س^{ن}} = د^{(ن)}(س)$ حيث ن عدد صحيح موجب

لاحظ أن :

١- $\frac{ء^{٢}ص}{ء س^{٢}}$ تقرأ دال اثنين ص دال س اثنين

٢- يوجد اختلاف بين $\frac{ء^{٢}ص}{ء س^{٢}}$ ، $(\frac{ء ص}{ء س})^{٢}$ فالأولى تدل على المشتقة الثانية للدالة بينما الثانية تدل على مربع المشتقة الأولى.

مثال

(١) أوجد المشتقة الثانية لكل من:

أ ص = $٢س^{٤} + ٣ س - ٥$ ب ص = $\frac{س + ١}{س - ١}$

١٤ كتاب الرياضيات البحتة - التفاضل والتكامل

⌑ وضح للطلاب بأن مشتقات الدالة بدءً من المشتقة الثانية تسمى بالمشتقات العليا للدالة.

⌑ كرر نفس الخطوة السابقة باعطاء الطلاب دوال أخرى مثل دوال مثلثية، جذرية، كسرية واطلب إليهم إيجاد المشتقات العليا لكل دالة من هذه الدوال.

⌑ بين إلى الطلاب الصيغ المختلفة التى تستخدم للمشتقات ذات الرتب العليا للدالة ص = د (س) وهما:

$د′(س)$ ، $د″(س)$، $د‴(س)$ ، $د^{(ن)}(س)$

$ص′$، $ص″$، $ص‴$ ، $ص^{(ب)}$

$\frac{ء ص}{ء س}$ ، $\frac{ء^{٢}ص}{ء س^{٢}} = \frac{ء^{٢}ص}{ء س^{٢}}$ ،... ، $\frac{ء^{ن}ص}{ء س^{ن}}$

## التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

⌑ ناقش طلابك ما ورد فى بند حاول أن تحل وتوصل معهم إلى الأجابات الصحيحة.

**حلول:** حاول أن تحل (١)

أ $\frac{ء ص}{ء س} = ٤ س^{٣} - ٤س$

$$\frac{د^2 ص}{د س^2} = ٨ س^2 - ٤$$

$$\frac{د^3 ص}{د س^3} = ١٦ س$$

**ب** $ع = (٢ن - ١)^4$

$$\frac{د ع}{د ن} = ٤ (٢ن - ١)^3 \times ٢ = ٨ (٢ن - ١)^3$$

$$\frac{د^2 ع}{د ن^2} = ٢٤ (٢ن - ١)^2 (٢) = ٤٨ (٢ن - ١)^2$$

$$\frac{د^3 ص}{د ن^3} = ٩٦ (٢ن - ١) (٢) = ١٩٢ (٢ن - ١)$$

**جـ** $د'(س) = -٢ جا (٢س + \pi)$

$$د''(س) = -٤ جتا (٢س + \pi)$$

$$د'''(س) = ٨ جا (٢ س + \pi)$$

**د** $د'(س) = \frac{(س - ١) - س}{(س - ١)^2} = \frac{-١}{(س - ١)^2}$

$$= -١ (س - ١)^{-2}$$

$$د''(س) = ٢ (س - ١)^{-3}$$

$$د'''(س) = -٦ (س - ١)^{-4}$$

### تفكير ناقد:

¤ يهدف إلى اكتشاف الطالب نمط الاشتقاق المتتالى للدالة المثلثية و يوجد مباشرة لأى نسبة

$$ص' = ا جتا ا س = ا جا (ا س + \frac{\pi}{٢})$$

$$ص'' = -ا^2 جا ا س = ا^2 جا (ا س + \pi)$$

$$ص''' = -ا^3 جتا ا س = ا^3 جا (ا س + \frac{٣\pi}{٢})$$

$$ص'''' = ا^4 جا ا س = ا^4 جا (ا س + ٢\pi)$$

$$ص^{(ن)} = ا^{ن} جا (ا س + \frac{ن\pi}{٢})$$

$$ص^{(٢٥)} = ا^{٢٥} جا (ا س + \frac{٢٥ \times \pi}{٢})$$

### حاول أن تحل (٢)

**أ** $٢س + ٢ ص ص' = ٠$

$٢ + ٢ ص ص'' + ٢ ص'^2 = ٠$ بالقسمة على ٢

$ص ص'' + ص'^2 + ١ = صفر$

**ب** $ص' = قا^2 س$

$$ص'' = ٢ قا س قا س ظا س$$

$$= ٢ قا^2 ظا س$$

$$= ٢ (١ + ظا^2 س) ظا س$$

$$= ٢ ص (١ + ص^2)$$



جـ $ص = جا (٣س - ٢)$ د $ص = \sqrt{٣س - ٢}$

**الحل**

أ ∵ $ص = ٢س^4 + ٣س^2 - ٥س$ ، س ∈ ع ∴ $\frac{دص}{دس} = ٨س^3 + ٣$ ، $\frac{د^2ص}{دس^2} = ٢٤س^2$

ب ∵ $ص = \frac{س + ١}{س - ١}$ ، س ≠ ١ ∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{س - ١ - (س + ١)}{(س - ١)^2} = \frac{-٢}{(س - ١)^2}$ ، س ≠ ١

$\frac{د^2ص}{دس^2} = \frac{د}{دس}[-٢(س - ١)^{-2}] = \frac{٤}{(س - ١)^3}$ ، س ≠ ١

جـ ∵ $ص = جا (٣س - ٢)$ ، س ∈ ع ∴ $\frac{دص}{دس} = ٣ جتا (٣س - ٢)$ ، $\frac{د^2ص}{دس^2} = -٩ جا (٣س - ٢)$

د ∵ $ص = \sqrt{٣س - ٢}$ ، س ⩾ $\frac{٢}{٣}$ ∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{٣}{٢\sqrt{٣س - ٢}}$ ، س > $\frac{٢}{٣}$

$\frac{د^2ص}{دس^2} = \frac{د}{دس}[\frac{٣}{٢}(٣س - ٢)^{-\frac{1}{2}}] = \frac{-٩}{٤\sqrt{(٣س - ٢)^3}}$ ، س > $\frac{٢}{٣}$

**حاول أن تحل**

١ أوجد المشتقة الثالثة لكل من:

أ $ص = س^4 - ٢س^2 + ٥$ ب $ع = (٢ن - ١)^4$

جـ $د(س) = جتا (٢س + \pi)$ د $د(س) = \frac{س}{س - ١}$

تفكير ناقد: إذا كانت ص = جا ا س استكشف نمط الاشتقاق المتتالى، أوجد $ص^{(٢٥)}$

**مثال**

٢ إذا كانت $ص^2 + ٢س ص = ٨$ أثبت أن: $(س + ص)\frac{د^2ص}{دس^2} + ٢\frac{دص}{دس} + (\frac{دص}{دس})^2 = صفر$

**الحل**

أ ∵ $ص^2 + ٢س ص = ٨$ ، باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

∴ $٢ص \frac{دص}{دس} + ٢س \frac{دص}{دس} + ٢ص = ٠$ بالقسمة على ٢

$(س + ص)\frac{دص}{دس} + ص = ٠$ باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

∴ $(س + ص)\frac{د^2ص}{دس^2} + \frac{دص}{دس}(١ + \frac{دص}{دس}) + \frac{دص}{دس} = ٠$

ويكون $(س + ص)\frac{د^2ص}{دس^2} + ٢\frac{دص}{دس} + (\frac{دص}{دس})^2 = صفر$

**حاول أن تحل**

٢ أ إذا كانت $س^2 + ص^2 = ٩$ أثبت أن: $ص \frac{د^2ص}{دس^2} + (\frac{دص}{دس})^2 + ١ = ٠$

ب إذا كانت ص = ظا س أثبت أن: $\frac{د^2ص}{دس^2} = ٢ص (١ + ص^2)$





**معادلات بارامترية**

**مثال**

٣ إذا كانت $س = ٢ن^3 - ٥$ ، $ص = ٦ن^2 + ١$ أوجد $\frac{د^2ص}{دس^2}$ عندن = ١

**الحل**

باشتقاق كل من س ، ص بالنسبة للبارامتر ن

∴ $\frac{دس}{دن} = ٦ن^2$ ، $\frac{دص}{دن} = ١٢ن$

∵ $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \times \frac{دن}{دس}$

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{١٢ن}{٦ن^2} = ٢ن^{-1}$ ، ن ≠ ٠

ويكون $\frac{د^2ص}{دس^2} = \frac{د}{دس}[٢ن^{-1}] = -٢ن^{-2} \times \frac{دن}{دس}$

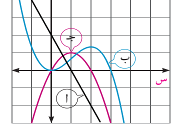
$= \frac{-٢}{ن^2} \times \frac{١}{٦ن^2} = -\frac{١}{٣ن^4}$ ، ن ≠ ٠

عند ن = ١ ∴ $\frac{د^2ص}{دس^2} = -\frac{١}{٣}$

**حاول أن تحل**

٣ إذا كانت $س = ع^2 - ٢ع$ ، $ص = ع^3$

أوجد $\frac{د^2ص}{دس^2}$ ، $\frac{د^3ص}{دس^3}$ عند ع = ٢




تفكير ناقد: يبين الشكل المقابل تمثيلاً بيانيًّا لمنحنيات الدوال د(س)، د'(س) ، د''(س) حيث د(س) كثيرة حدود، حدد منحنى كل دالة.

**نشاط**

باستخدام البرنامج الرسومى geogebra أو أى برنامج آخر ارسم الدوال التالية ومشتقاتها الأولى والثانية وسجل ملاحظاتك.

أ $د(س) = س^3 - ٤س^2 + ١٢$ ب $ر(س) = \frac{١}{٤}س^2 + ٤$

هل تتوافق ملاحظاتك مع قرارك في بند تفكير ناقد؟

## حاول أن تحل (٣)

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{ع} - ٢ ، \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{ع}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \div \frac{\text{ءس}}{\text{ءع}} = ٢\text{ع} \div (٢\text{ع} - ٢)$$

$$= \frac{\text{ع}}{\text{ع} - ١}$$

$$\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ءس}^٢} = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}} \left(\frac{\text{ع}}{\text{ع}-١}\right) = \frac{-١}{(\text{ع}-١)^٢} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$$

$$= \frac{-١}{(\text{ع}-١)^٢} \times \frac{١}{٢(\text{ع}-١)} = \frac{-١}{٢(\text{ع}-١)^٣} = \frac{-١}{٢}$$

$$\frac{\text{ء}^٣\text{ص}}{\text{ءس}^٣} = -\frac{١}{٢} \times -٣ (\text{ع}-١)^{-٤} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$$

$$= \frac{٣}{٢}(\text{ع}-١)^{-٤} \times \frac{١}{٢(\text{ع}-١)} = \frac{٣}{٤}(\text{ع}-١)^{-٥} = \frac{٣}{٤}$$

## تفكير ناقد

ب تمثل $\text{د}'(\text{س})$

جـ تمثل $\text{د}'(\text{س})$

أ تمثل $\text{د}''(\text{س})$



### تمارين الدرس (١ - ٣)

١) إذا كانت ص = أس^٣ + ب س^٢ + جـ س + ء وكانت ارتباطات س ، ص ، ص′، ص″ موضحة بالجدول التالي:
أوجد قيم أ ، ب ، جـ ، د الحقيقية ثم أكمل الجدول.

| س | ص | ص′ | ص″ |
|---|---|---|---|
| ١ | ٨ | | ٢٨ |
| ٢ | | ٧٥ | ٢٥ |

**أوجد المشتقة الثالثة لكلًا مما يأتى:**

٢) $\text{ص} = \text{س}^٥ - ٤\text{س}^٣ + ٣$

٣) $\text{ص} = \frac{٢\text{س}}{\text{س} + ١}$

٤) $\text{ص} = \text{جا}(٢\text{س} - ٧)$

٥) $\text{ص} = \text{جتا}(\pi - ٣\text{س})$

٦) $\text{ص} = \text{جاس جتاس}$

٧) $\text{ص} = \sqrt{٢\text{س} - ٥}$

**أجب عمًّا يأتي:**

٨) إذا كان $٣\text{س}^٢ + ٥ = ٢\text{س ص}$ أثبت أن: $\text{س}\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ءس}^٢} + ٢\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣$

٩) إذا كان $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = ٤$ أثبت أن: $\text{ص}^٣\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ءس}^٢} - ٤ = \text{صفر}$

١٠) إذا كان $\text{ص} = ٣\,\text{جتا}(٢\text{س} + ١)$ أثبت أن: $\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ءس}^٢} + ٤\text{ص} = ٠$

١١) إذا كان $\text{س ص} = \text{جاس جتاس}$ أثبت أن: $\text{س}\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ءس}^٢} + ٢\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + ٤\text{س ص} = ٠$

١٢) إذا كان $\text{ص} = \text{س جاس}$ أثبت أن: $\text{س}\frac{\text{ء}^٣\text{ص}}{\text{ءس}^٣} + \text{س}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + ٢\text{ص} = ٠$

١٣) إذا كان $\text{ص} = \text{قاس}$ أثبت أن: $\text{ص}\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ءس}^٢} + \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)^٢ = \text{ص}^٢(٣\text{ص}^٢ - ٢)$

١٤) إذا كان $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{س} - ٣ ، \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \text{س}^٢ - ١$ أوجد: $\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ءع}^٢}$ عند س = ٢

١٥) إذا كان $\text{س} = ٣\text{ن}^٢ - ١ ، \text{ص} = \text{ن}^٣ + ٢$ أوجد: $\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ءس}^٢}$ عند ن = ٤

١٦) إذا كان $\text{س} = \frac{\text{ع}+١}{\text{ع}-١} ، \text{ص} = \frac{\text{ع}-١}{\text{ع}+١}$ أوجد: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عند ع = ٢

١٧) إذا كان $\text{س} = \text{قاع} ، \sqrt{\text{ص}} = \text{ظاع}$ أثبت أن: $\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ءس}^٢} = ٢$



## حل تمارين (١-٣) على المشتقات العليا للدالة

**١)**

| س | | ١ | ٢ |
|---|---|---|---|
| ص | أس^٣ + ب س^٢ + جـ س + د | ٨ | ٦١ |
| ص′ | ٣أس^٢ + ٢ب س + جـ | ٢٥ | ٧٥ |
| ص″ | ٦أس + ٢ب | ٢٨ | ٥٢ |

$٦\text{أ} + ٢\text{ب} = ٢٨$ ، $٣\text{أ} + \text{ب} = ١٤$

$١٢\text{أ} + ٢\text{ب} = ٥٢$ ، $٦\text{أ} + \text{ب} = ٢٦$

$٣\text{أ} = ١٢$ ، $\text{أ} = ٤ ، \text{ب} = ٢$

$١٢\text{س}^٢ + ٤\text{س} + \text{جـ} = ٤٨ + ٨ + \text{جـ} = ٧٥$

$\text{جـ} = ٧٥ - ٥٦ = ١٩$ ، $\text{جـ} = ١٩$

$٤\text{س}^٣ + ٢\text{س}^٢ + ١٩\text{س} + \text{ء} = \text{ص}$

$٤ + ٢ + ١٩ + \text{ء} = ٨$ $\therefore \text{ء} = -١٧$

$\text{ص} = ٤\text{س}^٣ + ٢\text{س}^٢ + ١٩\text{س} - ١٧$

$\text{ص}' = ١٢\text{س}^٢ + ٤\text{س} + ١٩$

$\text{ص}'' = ٢٤ + ٤$

**٢)** $\text{ص}''' = ٦٠\text{س}^٢ - ٢٤$

**٣)** $\text{ص}''' = ١٢(\text{س} + ١)^{-٤}$

**٤)** $\text{ص}''' = -٨\,\text{جا}(٢\text{س} - ٧)$

**٥)** $\text{ص}''' = ٢٧\,\text{جا}(\pi - ٣\text{س})$

**٦)** $\text{ص}''' = -٤\,\text{جتا}\,٢\text{س}$

**٧)** $\text{ص}''' = \frac{٣}{٢}(٢\text{س} - ٥)^{\frac{٥}{٢}} \times ٢ = ٣(٢\text{س} - ٥)^{\frac{٥}{٢}}$

**٨)** $٦\text{س} = ٢\text{س ص}' + ٢\text{ص}$

$٦ = ٢\text{س ص}'' + ٢\text{ص}' + ٢\text{ص}'$

$٣ = \text{س ص}'' + ٢\text{ص}'$

**٩)** $٢\text{س} + ٢\text{ص ص}' = ٠$ $\therefore \text{ص}' = \frac{-\text{س}}{\text{ص}}$

$٢ + ٢\text{ص ص}'' + ٢\text{ص}'^{-٢} = ٠$

$١ + \text{ص ص}'' + \frac{\text{س}^٢}{\text{ص}^٢} = \text{صفر}$

$\text{ص}^٣\text{ص}''' + \text{ص}^٢ + \text{س}^٢ = ٠$

$\text{ص}^٣\text{ص}'' + ٤ = \text{صفر}$

**١٠)** $\text{ص}' = -٦\,\text{جا}(٢\text{س} + ١)$

$\text{ص}'' = -١٢\,\text{جتا}(٢\text{س} + ١)$

$= -٤ \times ٣\,\text{جتا}(٢\text{س} + ١)$

$\text{ص}'' = -٤\text{ص}$

$\text{ص}'' + ٤\text{ص} = ٠$

(١١) س ص′ + ص = $\frac{١}{٢}$ جتا ٢ س × ٢

س ص″ + ٢ص′ = - جا ٢س × ٢

س ص″ + ٢ص′ + ٤ س ص = صفر

(١٢) ص′ = س جتا س + جا س

ص″ = -س جا س + جتا س + جتا س

ص″ = -ص + ٢ جتا س

ص‴ + ص′ = -٢ جا س

ص‴ + ص′ = -٢ × $\frac{ص}{س}$ بالضرب × س

س ص‴ + س ص′ + ٢ ص = ٠

(١٣) ص′ = قا س ظا س

ص″ = قا س قا$^{٢}$س + ظا س ظا س قا س

= قا$^{٣}$س + قا س ظا$^{٢}$س

= قا$^{٣}$س + قا س (قا$^{٢}$س -١)

ص″ = ٢قا$^{٣}$ س - قا س × ص

ص ص″ = ٢ قا$^{٤}$ س - قا$^{٢}$ س (١)

ص′ = قا س ظا س بالتربيع

ص′$^{٢}$ = قا$^{٢}$ س ظا$^{٢}$س

= قا$^{٢}$س (قا$^{٢}$س -١)

= قا$^{٤}$ س - قا$^{٢}$ س (٢)

ص ص″ + ص′$^{٢}$ = ٣قا$^{٤}$ س - ٢قا$^{٢}$ س

= قا$^{٢}$ س (٣قا$^{٢}$ س -٢)

= ص$^{٢}$ (٣ ص$^{٢}$ -٢)

(١٤) $\frac{دص}{دع} = \frac{دص}{دس} \times \frac{دس}{دع} = \frac{٢س-٣}{س^{٢}-١}$

$\frac{د^{٢}ص}{دع^{٢}} = \frac{(س^{٢}-١)(٢) - (٢س-٣)(٢س)}{(س^{٢}-١)^{٢}} \times \frac{دس}{دع}$

$\left[\frac{د^{٢}ص}{دع^{٢}}\right]_{س=٢} = \frac{٣\times٢-١\times٤}{٩} \times \frac{١}{٣} = \frac{٢}{٢٧}$

(١٥) $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \times \frac{دن}{دس} = ٣ن^{٢} \times \frac{١}{٦ن} = \frac{ن}{٢}$

$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = \frac{١}{٢} \times ١ \times \frac{دن}{دس} = \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٦ن} = \frac{١}{١٢ن} = \frac{١}{٤٨}$

(١٦) س ص = ١ ∴ ص = $\frac{١}{س}$

$\frac{دص}{دس} = -س^{-٢}$ ، $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = ٢س^{-٣}$

عند ع = ٢ ∴ س = ٣.

$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = \frac{٢}{٣^{٣}} = \frac{٢}{٢٧}$ .

(١٧) $\sqrt{ص}$ = ظا ع **بالتربيع**

ص = ظا$^{٢}$ع = قا$^{٢}$ع -١

ص = س$^{٢}$ -١

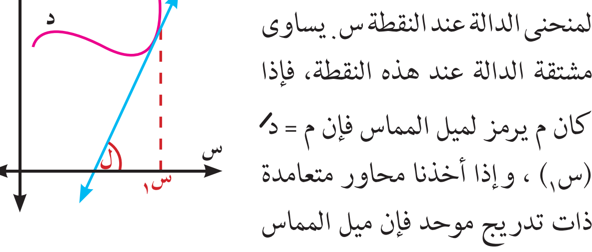
$\frac{دص}{دس} = ٢س$ ∴ $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = ٢$

# ١ - ٤

# معادلتي المماس والعمودي لمنحنى

Equation of the tangent and the normal to a curve

## خلفية:




سبق أن درس الطالب أن ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة س. يساوى مشتقة الدالة عند هذه النقطة، فإذا كان م يرمز لميل المماس فإن م = د/(س)، و إذا أخذنا محاور متعامدة ذات تدريج موحد فإن ميل المماس = ظا ل حيث ل قياس الزاوية التى يصنعها المماس مع الأتجاه الموجب لمحور السينات.

## مخرجات التعلم:

**فى نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:**

**١-** يوجد معادلة المماس عند أى نقطة واقعة على المنحنى.

**٢-** يوجد معادلة العمودى عند أى نقطة واقعة على المنحنى.

## مفردات أساسية

ميل المماس - ميل العمود - معادلة المماس - معادلة العمود.

## المواد التعليمية المستخدمة:

السبورة التعليمية - طباشير ملون- آلة حاسبة علمية- برامج رسوبية للحاسوب.

## طرق التدريس المقترحة:

العرض المباشر - المناقشة- العصف الذهنى- حل المشكلات.

مكان التدريس: الفصل الدراسى

## مصادر التعلم:

- كتاب الطالب من ص (١٨) حتى ص (٢٢)
- الشبكة الدولية للمعلومات (الأنترنت)

## تهيئة:

يمكن تهيئة الطلاب من خلال مناقشة ما ورد فى بند فكر وناقش وذلك بايجاد مشتقة الدالة (ميل المماس) ثم إيجاد قيمته العددية بالتعويض عن س = ٧ ومن خلال معرفة الطالب بمعادلة الخط المستقيم يمكنه إيجاد معادلة المماس وهى:

ص - ١٠ = ٢٥ (س - ٧)

ص = ٢٥ س - ١٦٥

---

١ - ٤

### معادلتا المماس والعمودى لمنحنى

Equation of the Tangent and the Normal to a Curve

**سوف تتعلم**

- إيجاد معادلة المماس عند نقطة واقعة على المنحنى.
- إيجاد معادلة العمودى لمنحنى عند نقطة واقعة على المنحنى.

**المصطلحات الأساسية**

- ميل المماس Slope of the Tangent
- ميل العمودى Slope of the Normal

**الأدوات المستخدمة**

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسب.

**فكر و ناقش**

يوضح الشكل المقابل طريقين أ ، ب أحدهما مستقيم والآخر منحنى متلاقيين عند الموقع جـ. إذا كان الموقع جـ تمثله النقطة جـ (١، ٤) فى مستوى إحداثى متعامد، وكانت معادلة الطريق ب : ص = ٢ س$^{٢}$ - ٣ س + ٥ ، هل يمكنك إيجاد معادلة الطريق أ ؟

هل يمر الطريق أ بالنقطة (٧ ، ١٠) ؟ فسر إجابتك.

جـ (١، ٤)

**تعلم**

إذا كانت النقطة أ(س١ ، ص١) تقع على منحنى الدالة د حيث ص = د(س) ، م ميل المماس للمنحنى عند هذه النقطة ، فإن :

**١-** معادلة المماس للمنحنى عند النقطة (س١ ، ص١) هى :

ص - ص١ = م (س - س١)

**٢-** معادلة العمودى على المنحنى عند النقطة (س١، ص١)

هى : ص - ص١ = $\frac{-١}{م}$ (س - س١)

ص = د(س) ، العمود عند أ ، المماس عند أ ، أ(س١ ، ص١) ، جـ ، ل ، و ، س ، ص

**مثال** دوال مثلثية

(١) أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى ص = ٢س - ظتا س عند النقطة التى تقع على المنحنى و إحداثيها السينى يساوى $\frac{\pi}{٤}$

**الحل**

لإيجاد نقطة تقع على المنحنى عند س = $\frac{\pi}{٤}$ نحسب إحداثيها الصادى حيث :

ص = ٢س - ظتا س ∴ ص = $\frac{٢ \times \pi}{٤}$ - ظتا $\frac{\pi}{٤}$ = $\frac{\pi}{٢}$ - ١

أى إن النقطة ($\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{\pi}{٢}$ - ١) تقع على المنحنى

**ميل مماس المنحنى عند أى نقطة** = $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ - ( -قتا$^{٢}$س) = ٢ + قتا$^{٢}$ س

نقطة على المنحنى ← $\frac{ءص}{ءس}$ ← ميل المماس ← معادلة المماس ، ميل العمودى ← معادلة العمودى

١٨ كتاب الرياضيات البحتة - التفاضل والتكامل

---

## أرشادات للدراسة

**وضح إلى طلابك ما يأتى:**

١- إذا كانت د/(س) = ٠ عند نقطة ما على المنحنى فإن : ظا ل = ٠ ويكون المماس للمنحنى موازيا لمحور السينات والعكس صحيح.

٢- إذا كان د/(س) ⟵ ∞ عند نقطة ما على المنحنى فإن ق(∠ل) = ٩٠° ويكون المماس عندها موازيا لمحور الصادات حيث د متصلة.

٣- إذا كانت د/(س) > ٠ عند نقطة ما على منحنى الدالة فإن ظا ل تكون موجبة وهذا يعنى أن المماس للمنحنى عند تلك النقطة يصنع زاوية حادة مع الأتجاه الموجب لمحور السينات والعكس صحيح.

٤- إذا كان د/(س) < ٠ عند نقطة ما على منحنى الدالة فإن ظا ل يكون سالبا عند هذه النقطة أى أن المماس يضع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات والعكس صحيح.

## التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

**ناقش طلابك ما ورد فى بند حاول أن تحل وتوصل معهم إلى الأجابات الصحيحة.**

## حلول

### حاول أن تحل (١)

∵ س = $\frac{٢\pi}{٣}$ ∴ ص = ٣ + قا $\frac{٢\pi}{٣}$ = $\frac{٥}{٢}$

($\frac{٢\pi}{٣}$ ، $\frac{٥}{٢}$) ∈ للمنحنى

ميل المماس للمنحنى عند أى نقطة = $\frac{دص}{دس}$ = قا س ظا س

$\frac{دص}{دس}$ = قا $\frac{٢\pi}{٣}$ ظا $\frac{٢\pi}{٣}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

عند س = $\frac{\pi}{٣}$

معادلة المماس (ص - $\frac{٥}{٢}$) = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (س - $\frac{٢\pi}{٣}$)

ص = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ س - $\frac{\sqrt{٣}\,\pi}{٣}$ + $\frac{٥}{٢}$

معادلة العمود ص - $\frac{٥}{٢}$ = $\frac{-٢}{\sqrt{٣}}$ (س - $\frac{٢\pi}{٣}$)

ص = $\frac{-٢}{\sqrt{٣}}$ س + $\frac{٤\pi}{٩}$ + $\frac{٥}{٢}$

### حاول أن تحل (٢)

النقطة (-١ ، ٣) ∈ للمنحنى

∴ ٦ س + ٢ ص $\frac{دص}{دس}$ = صفر

∴ $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{-٦س}{٢ص}$ عند النقطة أ (-١ ، ٣)

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{-٦\times-١}{٢\times٣}$ = ١

معادلة المماس (ص - ٣) = ١ (س + ١)

ص = س + ٤ (١)

معادلة العمودى ص - ٣ = -١ (س + ١)

ص = س + ٤ (١)

معادلة العمودى ص - ٣ = -١ (س + ١)

ص = -س + ٢ (٢)

نقط تقاطع المماس والعمودى مع محور السينات نضع ص = صفر

∴ ب = (-٤ ، ٠)، جـ = (٢ ، ٠)

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٣ = ٩ وحدات مربعة

### حاول أن تحل (٣)

ميل المماس عند أى نقطة = $\frac{دص}{دس}$ حيث:



∴ عند النقطة ($\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{\pi}{٢}$ - ١):

ميل المماس = ٢ + [قتا$^{٢}$ $\frac{\pi}{٤}$] = ٤ ، ميل العمودى = - $\frac{١}{٤}$

**معادلة المماس :** ص - ($\frac{\pi}{٢}$ - ١) = ٤ (س - $\frac{\pi}{٤}$) **أى إن :** ص = ٤س - $\frac{\pi}{٢}$ - ١

**معادلة العمودى:** ص - ($\frac{\pi}{٢}$ - ١) = $\frac{-١}{٤}$ (س - $\frac{\pi}{٤}$) **أى إن :** ص = - $\frac{١}{٤}$ س + $\frac{٩}{١٦}$ π - ١



**حاول أن تحل**

(١) أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى ص = ٣ + قا س عند النقطة التى تقع على المنحنى و إحداثيها السينى يساوى $\frac{٢\pi}{٣}$

**مثال** حساب المساحة

(٢) أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى س$^{٢}$ + ٣س ص + ص$^{٢}$ + ١ = ٠ عند النقطة أ (- ١، ١) ، و إذا قطعا محور السينات فى النقطتين ب ، جـ احسب مساحة المثلث أ ب جـ بالوحدات المربعة

**الحل**

∵ س$^{٢}$ + ٣س ص + ص$^{٢}$ + ١ = ٠

النقطة أ (- ١ ، ١) تحقق معادلة المنحنى فهى تقع عليه باشتقاق طرفى معادلة المنحنى بالنسبة إلى س لإيجاد ميل المماس عند أى نقطة

∴ ٢ س + ٣س $\frac{دص}{دس}$ + ٣ص + ٢ ص $\frac{دص}{دس}$ = ٠

عند النقطة أ (- ١ ، ١) ∴ $\frac{دص}{دس}$ = ١

∴ ميل المماس = ١ ، ميل العمودى = - ١

معادلة المماس : ص - ١ = س + ١ **أى** ص = س + ٢

معادلة العمودى : ص - ١ = - (س + ١) **أى** ص = - س

بحل معادلتى المماس والعمودى مع معادلة محور السينات ص = ٠ لإيجاد نقط التقاطع ب ، جـ

∴ النقطة ب (-٢، ٠) ، النقطة جـ (٠ ، ٠) ويكون ب جـ = ٠ - (- ٢) = ٢

مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ٢ × ١ = ١ وحدة مربعة

**حاول أن تحل**

(٢) أوجد مساحة المثلث المحدود بمحور السينات والمماس والعمودى للمنحنى ٣س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ = ١٢ عند النقطة (- ١ ، ٣)

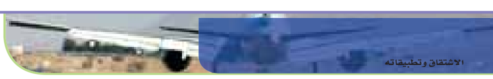
**مثال** اشتقاق بارامترى

(٣) المعادلتان البارامتريتان لمنحنى هما س = ن$^{٢}$ + ٢ ، ص = ن$^{٣}$ + ١

أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى عند ن = ١








**الحل**

ميل المماس عند أى نقطة = $\frac{دص}{دس}$ حيث :

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{دص}{دن}$ × $\frac{دن}{دس}$ = $\frac{دص}{دن}$ ÷ $\frac{دس}{دن}$ = $\frac{٣ن^{٢}}{٢ن}$ = $\frac{٣}{٢}$ ن

عند ن = ١ ميل المماس = $\frac{٣}{٢}$ ، ميل العمودى = -$\frac{٢}{٣}$ ، ∴ س = (١)$^{٢}$ + ٢ = ٣ ، ص = (١)$^{٣}$ + ١ = ٢

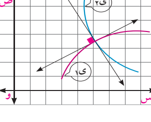
أى إن النقطة (٣ ، ٢) تقع على المنحنى ، وعندها يكون :

**معادلة المماس :** (ص - ٢) = $\frac{٣}{٢}$ (س - ٣) **أى** ٣س - ٢ ص - ٥ = ٠

**معادلة العمودى :** (ص- ٢) = - $\frac{٢}{٣}$ (س - ٣) **أى** ٢ س + ٣ص - ١٢ = ٠

**حاول أن تحل**

(٣) أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى س = جتا θ ، ص = $\sqrt{٢}$ + جا θ عند θ = $\frac{\pi}{٤}$

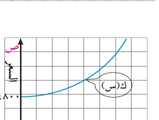


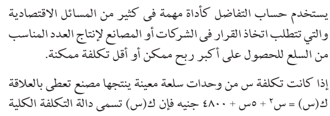

تفكير ناقد: إذا كانت النقطة (١ ، ٢) إحدى نقط تقاطع المنحنيين: ص$^{٢}$ - س$^{٢}$ = ٣ ، س ص = ٢ هل يتعامد مماسا المنحنيين عند هذه النقطة؟ فسر إجابتك.

**ملاحظة مهمة :** نقول إن المنحنيين ى$_{١}$ ، ى$_{٢}$ يتقاطعان على التعامد إذا كان المماسان المرسومان لهما من نقطة تقاطعهما متعامدين

تطبيقات إقتصادية:

يستخدم حساب التفاضل كأداة مهمة فى كثير من المسائل الاقتصادية والتي تتطلب اتخاذ القرار فى الشركات أو المصانع لإنتاج العدد المناسب من السلع للحصول على أكبر ربح ممكن أو أقل تكلفة ممكنة.



إذا كانت تكلفة س من وحدات سلعة معينة ينتجها مصنع تعطى بالعلاقة ك(س) = س$^{٢}$ + ٥س + ٤٨٠٠ جنيه فإن ك(س) تسمى دالة التكلفة الكلية وتعتمد على المقدار الثابت ٤٨٠٠ والمقدار المتغير س$^{٢}$ + ٥س والذى يتغير وفق عدد الوحدات المنتجة س و يوضح الشكل المقابل منحنى ك(س).

المشتقة الأولى لدالة التكلفة الكلية ك(س) تسمى دالة التكلفة الحدية ك/ (س) marginal cost وتعبر عن التغير فى التكلفة الكلية عند إنتاج وحدة إضافية واحدة .

**لاحظ أن:**

**١)** ك/ (س) = ٢ س + ٥ لا تتأثر بالمقدار الثابت ٤٨٠٠، لذلك فإن النفقات الثابتة لمصنع لا تؤثر فى التكلفة الحدية عند إنتاج ٥٠ وحدة مثلًا .

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ء}\theta} \times \frac{\text{ء}\theta}{\text{ءس}}$$

$$= \text{جتا}\ \theta \div -\ \text{جا}\ \theta$$

$$= -\ \frac{\text{جتا}\ \theta}{\text{جا}\ \theta}$$

عند $\theta = \frac{\pi}{٤}$ $\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -١$

عند $\theta = \frac{\pi}{٤}$ $\therefore$ س $= \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ،

ص $= \sqrt{٢} + \frac{١}{\sqrt{٢}}$ النقطة $\left(\frac{١}{\sqrt{٢}} ، \frac{٣}{\sqrt{٢}}\right)$

معادلة المماس ص $- \frac{٣}{\sqrt{٢}} = -١$ (س $- \frac{١}{\sqrt{٢}}$)

ص + س $= ٢\sqrt{٢}$

معادلة العمودى ص $- \frac{٣}{\sqrt{٢}} = ١$ (س $- \frac{١}{\sqrt{٢}}$)

ص - س $= \sqrt{٢}$

## تفكير ناقد: ص (٢٠)

**ويهدف إلى مدى معرفة الطالب لتعامد مستقيمان بمعلومية ميل كل منهما.**

**الإجابة:**

(١ ، ٢) $\in$ للمنحنيين

**المماس الأول :** ٢ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ - ٢س = ٠

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{١}{٢}$

**ميل المماس الثانى :** س $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ + ص = ٠

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-\text{ص}}{\text{س}} = \frac{-٢}{١}$ المماسان يتعامدان .

## حاول أن تحل (٤)

أ) دالة الإيراد الكلى = دالة الطلب × عدد الوحدات

د (س) = ٥٠٠ س - $\frac{١}{٢}$س$^{٢}$

دالة الإيراد الحدى =د/(س) = ٥٠٠ - س

ب) قيمة الايراد الحدى عند بيع ١٠٠ وحدة

= ٥٠٠ - ١٠٠ = ٤٠٠ جنيهًا / وحدة

### حلول التمارين (١-٤)

١) أ) المنحنى ق (س) = د (س) × ر (س)

يمر بالنقطة (٣ ، د (٣) × ر (٣)) أى (٣ ، ٧)

معادلتا المماس والعمودى لمنحنى ١ - ٤

٢) عند إنتاج ٥٠ وحدة فإن: التكلفة الحدية = ك/(٥٠) = ٢ (٥٠) + ٥ = ١٠٥ جنيه / وحدة
وهذا يعنى أن تكلفة كل وحدة إضافية يزيد التكاليف الكلية بقدر ١٠٥ جنيه.
و إذا كانت د(س) هى دالة الإيراد الكلي فإن د/(س) هى دالة الإيراد الحدى marginal revenue وتعبر عن إيراد وحدة إضافية واحدة فى اللحظة التى يبيع فيها س من الوحدات.
تكون دالة الربح الكلى ر(س) = د(س) - ك (س) ، ودالة الربح الحدى ر/(س) marginal profit
حيث ر/(س) = د/(س) - ك/(س) وتعبر عن ربح وحدة إضافية واحدة فى اللحظة التى يبيع منها س من الوحدات

مثال

٤) إذا كانت دالة الطلب هى العلاقة التى تحدد سعر الوحدة (ص) جنيهًا بدلالة عدد الوحدات س حيث ص = ٩٠ - ٠,٢ س ، دالة التكاليف ك(س) = ٥٠٠٠ + ٣٠ س جنيهًا، احسب الربح الحدى عند إنتاج وبيع ١٠٠ وحدة ، ١٥٠ وحدة ، ٢٠٠ وحدة فسر النتائج.

الحل

$\because$ سعر الوحدة ص = ٩٠ - ٠,٢ س ، عدد الوحدات = س

$\therefore$ دالة الإيراد الكلى : د(س) = س × ص = ٩٠ س - ٠,٢ س$^{٢}$

$\because$ دالة التكاليف الكلية : ك(س) = ٥٠٠٠ + ٣٠ س

$\therefore$ دالة الربح الكلى ر(س) = د(س) - ك(س)

وتكون دالة الربح الحدى ر/(س) = د/(س) - ك/(س) = ٩٠ - ٠,٤ س - ٣٠

$\therefore$ ر/(س) = ٦٠ - ٠,٤ س

عند س = ١٠٠ ر/(١٠٠) = ٦٠ - $\frac{٤}{١٠}$ × ١٠٠ = ٢٠ جنيه / وحدة

أى إنتاج وبيع وحدة إضافية واحدة بعد بيع ١٠٠ وحدة يحقق زيادة فى الربح قدرها ٢٠ جنيهًا

عند س = ١٥٠ ر/(١٥٠) = ٦٠ - $\frac{٤}{١٠}$ × ١٥٠ = صفر

أى إنتاج وبيع وحدة إضافية واحدة بعد بيع ١٥٠ وحدة لايغير من معدل الربح

عند س = ٢٠٠ ر/(٢٠٠) = ٦٠ - $\frac{٤}{١٠}$ × ٢٠٠ = - ٢٠ جنيه / وحدة

أى إنتاج وبيع وحدة إضافية واحدة بعد بيع ٢٠٠ وحدة يخفض الربح بمقدار ٢٠ جنيهًا.

حاول أن تحل

٤) إذا كانت دالة الطلب لسلعة معينة تمثلها العلاقة ص = ٥٠٠ - ٠,٥ س حيث س عدد الوحدات ، ص سعر الوحدة بالجنيه أوجد:
أ) دالة الإيراد الكلى ودالة الإيراد الحدى.
ب) قيمة الإيراد الحدى عند بيع ١٠٠ وحدة، وفسر النتائج.
ج) احسب الربح الحدى عند بيع ١٥٠ وحدة، وفسر النتائج.

كتاب الطالب – الصف الثالث الثانوى ٢١

ق/(س) = د/(س) × ر (س) + ر/(س) × د(س)

ق/ (٣) = د/(٣) × ر (٣) + ر/(٣) × د (٣)

= -١ × ٧ + ٦ × ١ = -١

معادلة المماس ص - ٧ = -١ (س -٣)

ص = - س + ١٠

العمودى : ص - ٧ = ١ (س - ٣)

ص = س + ٤

ج) المنحنى ق (س) = د (ر (س)) تمر بالنقطة (٣ ، ق (٣))(٣ ، د (ر (٣)))

= (٣ ، د (٧)) = (٣ ، -٢)

ق/ (س) = د/(ر (س)) × ر/(س)

= د/(ر (٣) ) × ر/(٣)

= د/(٧) × ٦ = ٢ × ٦ = ١٢

معادلة المماس ص + ٢ = ١٢ (س -٣)

ص = ١٢ س - ٣٨

العمودى ص + ٢ = = $\frac{-١}{١٢}$ (س -٣)

١٢ ص + ٢٤ = -س +٣

١٢ ص + س - ٢١ = صفر

الاشتقاق وتطبيقاته

## تمارين الدرس (١ - ٤)

① إذا كانت د ، ر ، ق دوال قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س ، أوجد معادلتى المماس والعمودى لمنحنى الدالة ق فى كل مما يأتى مستعينًا بالقيم المعطاة فى الجدول التالى:

أ ق(س) = د(س) × ر(س) ، س = ٣

ب ق(س) = د(س) ÷ ر(س) ، س = ٧

ج ق(س) = د[ر(س)] ، س = ٣

| س | د(س) | ر(س) | د′(س) | ر′(س) |
|---|---|---|---|---|
| ٣ | ١ | ٧ | -١ | ٦ |
| ٧ | -٢ | ١ | ٢ | ٥ |

② أوجد معادلتى المماس والعمودى لمنحنى الدالة د حيث ص = د(س) عند قيم س المعطاة:

أ ص = ٣ - ظتا$^{٢}$س ، س = $\frac{\pi}{٤}$   ب ص = ٢ جتا س - قا س ، س = $\frac{\pi}{٣}$

③ أوجد معادلتى المماس والعمودى لكل من المنحنيات التالية عند النقط المعطاة:

أ س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ = ٥٢ عند النقطة (٤ ، -٦)

ب س$^{٢}$ + ٥ س ص + ص$^{٢}$ = ٧ عند النقطة (-١ ، -١)

ج ص$^{٢}$ (١ + س$^{٢}$) = ٨ عند النقطة (-١ ، ٢)

د (جا س + جتا س) ص = جتا$^{٢}$ س عند س = $\frac{\pi}{٢}$

④ أوجد معادلتى المماس والعمودى لكل من المنحنيات التالية عند القيم المعطاة:

أ س = ن$^{٢}$ + ٤ ن ، ص = ٢ن$^{٢}$ عند ن = ١

ب س = قا$\theta$ ، ص = ظا$\theta$ عند $\theta$ = $\frac{\pi}{٦}$

⑤ إذا كانت النقطة (٤ ، -٢) تنتمى إلى المنحنى س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ - ٢ ك س + ١٢ = ٠ أوجد قيمة ك، ثم أوجد معادلة المماس للمنحنى عند هذه النقطة.

⑥ **مساحة المثلث**: أوجد مساحة المثلث المحدود بمحور السينات والمماس والعمودى عليه للمنحنى س$^{٢}$ + ٤ص$^{٢}$ = ٢٠ عند النقطة (٢ ، ٢)

⑦ **تعامد منحنيين**: أثبت أن المنحنيين (س - ١)$^{٢}$ + ص$^{٢}$ = ٢ ، (س + ١)$^{٢}$ + ص$^{٢}$ = ٢ يتقاطعان على التعامد، ثم أوجد معادلات المماسات لهما عند نقط التقاطع.

⑧ **الإيراد الحدى**: إذا كانت دالة الطلب لمنتج ص = $\frac{١٠٠٠}{س + ٢}$ حيث ص سعر الوحدة ، س عدد الوحدات.

أ أوجد دالة الإيراد الكلى ، دالة الإيراد الحدى واحسب الإيراد الحدى عند س = ٤٨، وفسر إجابتك.

ب أوجد د (٤٩) - د(٤٨) وقارن بين الناتج وبين قيمة الإيراد الحدى عند س = ٤٨، ماذا تستنتج؟

٢٢ كتاب الرياضيات البحتة - التفاضل والتكامل

② ب عند س = $\frac{\pi}{٣}$   ∴ ص = ٢ جتا $\frac{\pi}{٣}$ - قا $\frac{\pi}{٣}$

ص = ٢ × $\frac{١}{٢}$ - ٢ = -١

النقطة ($\frac{\pi}{٣}$ ، -١) يمر بها المنحنى

∴ ميل المماس للمنحنى عند أى نقطة

ص′ = -٢ جا س - قا س ظا س

= -٢ جا $\frac{\pi}{٣}$ - قا $\frac{\pi}{٣}$ ظا $\frac{\pi}{٣}$

= -$\sqrt{٣}$ - ٢ × $\sqrt{٣}$ = -٣$\sqrt{٣}$

∴ معادلة المماس ص + ١ = -٣$\sqrt{٣}$ (س - $\frac{\pi}{٣}$)

ص = -٣$\sqrt{٣}$ س - ١ + $\sqrt{٣}$ $\pi$.

العمودى ص + ١ = $\frac{١}{٣\sqrt{٣}}$ (س - $\frac{\pi}{٣}$)

٣$\sqrt{٣}$ ص + ٣$\sqrt{٣}$ = س - $\frac{\pi}{٣}$

٣$\sqrt{٣}$ ص - س + ٣$\sqrt{٣}$ + $\frac{\pi}{٣}$ = ٠

④ أ عند ن = ١ ∴ س = ٥ ، ص = ٢   النقطة (٥ ، ٢)

$\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{ءص}{ءن}$ × $\frac{ءن}{ءس}$ = $\frac{٤ن}{٢ن + ٤}$

$\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{٤}{٦}$ = $\frac{٢}{٣}$

معادلة المماس (ص - ٢) = $\frac{٢}{٣}$ (س - ٥)

٣ص - ٦ = ٢س - ١٠   ٣ص - ٢س + ٤ = ٠

العمودى ص - ٢ = $\frac{-٣}{٢}$ (س - ٥)

٢ص - ٤ = -٣س + ١٥   ٢ص + ٣س - ١٩ = ٠

⑤ ∵ النقطة (٤ ، -٢) ∈ للمنحنى

∴ ١٦ + ٤ - ٢ك × ٤ + ١٢ = ٠   ∴ ٨ ك = ٣٢   ك = ٤

ميل المماس للمنحنى عند أى نقطة

٢س + ٢ص ص′ - ٢ × ٤ = ٠

٨ - ٤ ص′ - ٨ ص = ٠ ∴ ص′ = ٠ ومعادلة المماس ص = -٢

⑦ نقطة تقاطع المنحنيين (٠ ، ١) ، (٠ ، -١)

ميل المنحنى الأول ٢ (س - ١) + ٢ ص ص′ = ٠

ص′ = $\frac{١ - س}{ص}$   ص′ عند (٠ ، ١) = $\frac{١ - ٠}{١}$ = ١

ص′ عند (٠ ، -١) = $\frac{١}{-١}$ = -١

ميل المنحنى الثانى ٢ (س + ١) + ٢ ص ص′ = ٠

ص′ = $\frac{- س - ١}{ص}$   ص′ عند (٠ ، ١) = $\frac{-١}{١}$ = -١

ص′ عند (٠ ، -١) = $\frac{-١}{-١}$ = ١

المنحنيين يتقاطعان مع التعامد عند (٠ ، ١) ، (٠ ، -١)

معادلة المماس للمنحنى الأول

(ص - ١) = ١ (س - ٠)   ص = س + ١

وهكذا القطعة الثانية

⑧ دالة الإيراد الكلى = س ص

د (س) = $\frac{١٠٠٠ س}{س + ٢}$

الايراد الحدى د′(س)   د′(س) = $\frac{٢٠٠٠}{(س + ٢)^{٢}}$

د′(٤٨) = $\frac{٢٠٠٠}{٥٠ × ٥٠}$ = $\frac{٤}{٥}$

د (٤٩) - د (٤٨) = $\frac{١٠٠٠ × ٤٩}{٥١}$ - $\frac{١٠٠٠ × ٤٨}{٥٠}$ =

= $\frac{١٠٠٠ [٤٩ × ٥٠ - ٤٨ × ٥١]}{٥٠ × ٥١}$ = $\frac{٤}{١٣٠٠٥}$

# ١ - ٥

# المعدلات الزمنية المرتبطة

**Related Rates**

## خلفية:

تعد مسائل المعدلات الزمنية المرتبطة من المسائل الحيوية فى تطبيقات الأشتقاق، ففى هذا النوع من المسائل يتم استخدام معادلة تربط بين متغيرين أو أكثر لإيجاد معدل تغير أحدهما معتمدا على معدل تغير الآخر، فلو عبرنا عن المتغير ص كدالة فى المتغير س بالمعادلة ص = د(س)، وتغير المتغير س بالنسبة لمتغير آخر وليكن الزمن ن، وكان معدل التغير $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء ن}}$ معلومًا فإنه بالأمكان إيجاد معدل التغير $\frac{\text{ء س}}{\text{ء ن}}$ ويتم ذلك باستخدام قاعدة السلسلة.

ففى بند فكر وناقش يكون كلًا من نق ، م دالة بالنسبة للزمن حيث ترتبطان بالعلاقة : م = $\pi$نق$^{2}$ وبالأشتقاق بالنسبة للزمن يكون $\frac{\text{ء م}}{\text{ء ن}}$ = ٢$\pi$نق × $\frac{\text{ء نق}}{\text{ء ن}}$ ويكون المعدل $\frac{\text{ء م}}{\text{ء ن}}$ مرتبطًا بالمعدل $\frac{\text{ء نق}}{\text{ء ن}}$ فإذا علمنا نق، من أى لحظة فإننا نوجد $\frac{\text{ء م}}{\text{ء ن}}$ والعكس صحيح.

## مخرجات التعلم:

**فى نهاية هذا الدرس يكون الطالب قادرًا على أن:**

١- يتقن مفهوم المعدلات الزمنية المرتبطة

٢- يتمكن من حل مسائل المعدلات الزمنية المرتبطة بطرق مختلفة.

٣- ينمذج ويحل مسائل تتناول مشكلات رياضية وفيزيائية وحياتية.

## المواد التعلمية المستخدمة:

السبورة التعليمية - طباشير ملون- آلة حاسبة علمية

## طرق التدريس المقترحة:

العرض المباشر - المناقشة - العصف الذهنى- حل المشكلات.

## مكان التدريس:

الفصل الدراسى



١ - ٥ المعدلات الزمنية المرتبطة

Related Rates

**سوف تتعلم**

- مفهوم المعدلات الزمنية المرتبطة
- طرق حل معادلات المعدلات الزمنية المرتبطة
- نمذجة وحل مشكلات رياضية وفيزيائية وحياتية

**المصطلحات الأساسية**

- معدل Rate
- معدلات مرتبطة Related Rates

**الأدوات المستخدمة**

- آله حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسب

تحديد المتغيرات وتسميتها ← رسم تخطيطى للمدخلات ← إيجاد علاقة الارتباط ← اشتقاق العلاقة بالنسبة للزمن ← التعويض عن القيم لإيجاد المعدل المطلوب

**فكر و ناقش**

عند تعرض صفيحة دائرية لمصدر حرارى زمنًا قدره (ن) ثانية

- هل يتغير طول نصف قطرها (نق) بتغير الزمن (ن)؟
- هل تتغير مساحة سطح الصفيحة (م) بتغير الزمن(ن)؟
- هل تتغير مساحة سطح الصفيحة (م) بتغير طول نصف قطرها (نق) ؟ فسر إجابتك.



**لاحظ أن :**

١ – المتغيرين م ، نق كلاهما يتغير بتغير الزمن (دالة فى الزمن) وتربطهما العلاقة م = $\pi$ نق$^{2}$ أى أن : م = د(نق)

٢ – اشتقاق طرفى العلاقة السابقة بالنسبة للزمن يؤدى إلى معادلة جديدة تربط بين المعدل الزمنى لتغير كل منهما وتعرف بمعادلة المعدلات المرتبطة

حيث : $\frac{\text{ء م}}{\text{ء ن}}$ =د/(نق) × $\frac{\text{ء نق}}{\text{ء ن}}$

٣ – المعدل الزمنى يكون موجبًا إذا كان المتغير يتزايد بتزايد الزمن، ويكون سالبًا إذا كان المتغير يتناقص بتزايد الزمن.

تعبير شفهى : أى المعدلات التالية يكون موجبًا؟

(تمدد - انكماش - اقتراب - تباعد - صب - تسرب - انصهار - تراكم - تناقص - تزايد)

**مثال** نفخ البالون

① بالون كُورى عند ملئه بالغاز كان معدل الزيادة فى حجمه ٨$\pi$ سم$^{3}$/ث عندما كان طول نصف القطر ٤سم . أوجد فى هذه اللحظة:

أ معدل زيادة طول نصف القطر.

ب معدل الزيادة فى المساحة السطحية.

**الحل**

بفرض أن حجم البالون (ح) وطول نصف القطر (نق) ، ومساحة سطح البالون (م) دوال قابلة للاشتقاق فى ن.

كتاب الطالب – الصف الثالث الثانوى

٢٣

## مصادر التعلم:

كتاب الطالب من ص (٢٣) إلى ص (٣٥)

## تهيئة:

إطلب إلى الطلاب الاجابة على البنود الواردة فى بند فكر وناقش ووضح اليهم أن نتيجة لتعرض الصفيحة الدائرية المعدنية للحرارة فإنها تتمدد وينتج عن ذلك زيادة فى طول نصف قطرها مما يترتب عليه زيادة فى مساحة سطحها (م) بتغير الزمن (ن).

- يكون معدل زيادة نصف القطر بالنسبة للزمن يتبعه الزيادة فى مساحة سطحها موجبا فى حالة التمدد بالتسخين، ويكون سالبا في حالة الأنكماش بالتبريد.

- اذا كانت م =$\pi$نق$^{2}$ وعند الإشتقاق بالنسبة للزمن فإن:

$$\frac{\text{ء م}}{\text{ء ن}} = ٢\pi\text{نق} \times \frac{\text{ء نق}}{\text{ء ن}}$$

### فى بند تعبير شفهى ص (٢٣)

**ناقش مع طلابك المعدلات الموجبة مثل:**

تمدد - تباعد - صب - تراكم - تزايد،

المعدلات التناقصية مثل: انكماش - إقتراب - انصهار - تسرب

أ) ح = $\frac{٤}{٣}$ π نق^٣ باشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة للزمن

ءح/ءن = $\frac{٤}{٣}$ π × ٣نق^٢ ءنق/ءن = ٤πنق^٢ ءنق/ءن (١)

∵ ءح/ءن = ٨ π سم^٣/ث ، نق = ٤سم بالتعويض فى المعادلة

∴ ٨ π = ٤ π(٤)^٢ ءنق/ءن أى ءنق/ءن = $\frac{١}{٨}$ سم/ث

ب) م = ٤ π نق^٢ باشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة للزمن

ءم/ءن = ٤ π × ٢نق ءنق/ءن = ٨ πنق ءنق/ءن (٢)

∵ ءنق/ءن = $\frac{١}{٨}$ سم/ث ، نق = ٤سم بالتعويض فى المعادلة

∴ ءم/ءن = ٨ π × ٤ × $\frac{١}{٨}$ = ٤ π سم^٢/ث

**حاول أن تحل**

١) الحجم: مكعب يتمدد بالحرارة فيزداد طول حرفه بمعدل ٠,٠٢ سم/د، وتزداد مساحة سطحه فى لحظة ما بمعدل ٠,٧٢ سم^٢/د، أوجد طول حرف المكعب فى هذه اللحظة ومعدل الزيادة فى حجمه حينئذ.

**مثال** حركة السلم

٢) يستند سلم طوله ٢٥٠سم على حائط رأسى، فإذا انزلق الطرف العلوى للسلم إلى أسفل الحائط بمعدل ١٠سم/ث عندما يكون الطرف السفلى للسلم على بعد ٧٠سم من الحائط . أوجد:

أ) معدل انزلاق الطرف السفلى للسلم.

ب) معدل تغير قياس الزاوية بين السلم والأرض.

**الحل**

أ) نفرض أن : ص المسافة بين الطرف العلوى للسلم والأرض،
س المسافة بين الطرف السفلى للسلم والحائط الرأسى.

من نظرية فيثاغورث س^٢ + ص^٢ = (٢٥٠)^٢ (١)

باشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة للزمن

٢ س ءس/ءن + ٢ ص ءص/ءن = ٠ ∴ ءس/ءن = - ص/س ءص/ءن (٢)

∵ الطرف العلوى ينزلق أسفل الحائط فإن ص تتناقص

∴ ءص/ءن = - ١٠ سم/ث

عند س = ٧٠ سم ومن المعادلة (١) نجد أن: ص = ٢٤٠ سم

بالتعويض فى المعادلة (٢) ينتج أن: ءس/ءن = - $\frac{٢٤٠}{٧}$ × - ١٠ = $\frac{٢٤٠}{٧}$ سم/ث

أى إن الطرف السفلى للسلم ينزلق مبتعدًا عن الحائط بمعدل $\frac{٢٤٠}{٧}$ سم/ث

ءص/ءن ، ص ، ٢٥٠ سم ، θ ، س ، ءس/ءن ، ٧٠ سم





ب) نفرض أن : θ قياس زاوية ميل السلم على الأرض

جا θ = $\frac{\text{ص}}{٢٥٠}$ باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى ن

∴ جتا θ ءθ/ءن = $\frac{١}{٢٥٠}$ ءص/ءن لكن ءص/ءن = - ١٠ /ث عند س = ٧٠ سم

$\frac{٧٠}{٢٥٠}$ × ءθ/ءن = $\frac{١}{٢٥٠}$ × - ١٠ ∴ ءθ/ءن = - $\frac{١}{٧}$ ء/ث

أى إن قياس الزاوية يتناقص بمعدل $\frac{١}{٧}$ زاوية نصف قطريه /ث

**حاول أن تحل**

٢) حركة سلم: يرتكز سلم بطرفه الأسفل على أرض أفقية وطرفه الأعلى على حائط رأسى . إذا انزلق الطرف السفلى مبتعدًا عن الحائط بمعدل ٣٠سم/ث ، أوجد معدل انزلاق الطرف العلوى عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والأرض تساوى $\frac{\pi}{٣}$

تفكير ناقد: انطلق صاروخ كتلته ١٥ طنًا وكان ينفث الوقود بمعدل ثابت ٢٠٠ كجم/ث، ما كتلة الصاروخ بعد ٣٠ ثانية من لحظة إطلاقه؟

ملاحظة مهمة: إذا كانت س٠ القيمة الابتدائية للمتغير س ( عند ن = ٠) ، ءس/ءن معدل تغير س بالنسبة للزمن ، س قيمة المتغير بعد زمن ن فإن : س = س٠ + ءس/ءن × ن

فى بند تفكير ناقد السابق استخدم العلاقة ك = ك٠ + ءس/ءن × ن لتتحقق من صحة إجابتك.

**مثال** المساحة

٣) مثلث قائم الزاوية طولا ضلعى القائمة ١٢سم ، ١٦سم، فإذا كان طول الضلع الأول يتزايد بمعدل ٢ سم/ث وكان طول الضلع الثانى يتناقص بمعدل ١ سم/ث.

أ) أوجد معدل تغير مساحة المثلث بعد ٢ ث

ب) متى يصبح هذا المثلث مثلثًا متساوى الساقين؟

**الحل**

أ) نفرض أن س ، ص طولا ضلعى القائمة بعد زمن قدره ن ثانية،
م مساحة المثلث حينئذ حيث س ، ص ، م دوال فى الزمن:

∴ س = ١٢ + ٢ ن ، ص = ١٦ - ن

م = $\frac{١}{٢}$ س × ص = $\frac{١}{٢}$ (١٢ + ٢ ن) (١٦ - ن)

م = (٦ + ن) (١٦ - ن) باشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة للزمن

∴ ءم/ءن = (٦ + ن) × - ١ + (١٦ - ن) = ١٠ - ٢ ن سم^٢/ث

عند ن = ٢ ث ∴ معدل تغير مساحة المثلث = ١٠ - ٢ (٢) = ٦ سم^٢/ث

أ ، ص٠ = ١٦ سم ، ص ، ءص/ءن = - ١ سم/ث ، س ، ب ، جـ ، س٠ = ١٢ سم ، ءس/ءن = ٢ سم/ث



## أخطاء شائعة:

قد يخطئ بعض الطلاب أثناء التعويض بالمعدلات المعلومة استخدام الإشارة السالبة.
لذلك يراعى التأكيد على المعدلات الموجبة والأخرى السالبة، كما ورد فى بند تعبير شفهى.

## التقييم المستمر (الحوار والمناقشة):

**ناقش مع طلابك ما ورد فى بند حاول أن تحل وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة.**

**حلول: حاول أن تحل (١)**

مساحة سطح المكعب م = ٦ ل^٢

$$\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = ١٢\,\text{ل}\,\frac{\text{ءل}}{\text{ءن}}$$

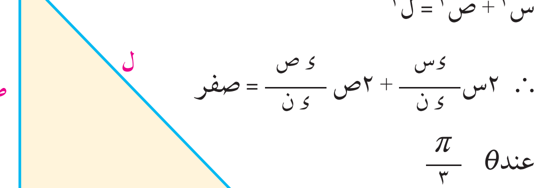
٠,٧٢ = ١٢ × ل × ٠,٠٢ ل = ٣

حجم المكعب ح = ل^٣

$$\frac{\text{ءح}}{\text{ءن}} = ٣\,\text{ل}^٢ \times \frac{\text{ءل}}{\text{ءن}}$$

= ٣ × ٩ × ٠,٠٢ = ٠,٥٤ سم^٣/د

**حاول أن تحل (٢)**




س^٢ + ص^٢ = ل^٢

∴ ٢س ءس/ءن + ٢ص ءص/ءن = صفر

عند θ = $\frac{\pi}{٣}$

∴ ابعاد المثلث

ابعاد مثلث ثلاثينى سينى وهى :

س، $\sqrt{٣}$ س ، ٢ س

٢س × ٣٠ + ٢ × $\sqrt{٣}$ س × ءص/ءن = ٠

ءص/ءن = $\frac{-٦٠}{٢\sqrt{٣}}$ = -١٠ $\sqrt{٣}$ سم/ث

**فى بند تفكير ناقد :**

**يهدف هذا التفكير لمعرفة الطالب بالكتلة المتغيرة وتحسب كالآتى:**

كتلة الصاروخ النهائية ك

∴ ك = ك٠ + ءك/ءن × ن

ك = ١٥ × ١٠٠٠ - ٢٠٠ × ٣٠

= ١٥ × ١٠٠٠ - ٦ × ١٠٠٠ = ٩ طن

## التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

**ناقش مع طلابك ما ورد فى بند حاول أن تحل وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة.**

### حلول:

**٣** نفرض أن طول قاعدة المتوازى بعد ن ثانية هى س = ٥ + ن

وان الارتفاع ع = ٢٠ - ٢ ن

حجم متوازى المستطيلات = $(٥ + ن)^{٢}\,(٢٠ - ٢ن)$

$ح = (٥ + ن)^{٢}\,(٢٠ - ٢ن)$

$\frac{دح}{دن} = ٢\,(٥ + ن)\,(٢٠ - ٢ن) - ٢\,(٥ + ن)^{٢}$

$= (١٠ + ٢ن)\,[٢٠ - ٢ن - ٥ - ن]$

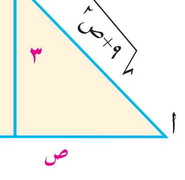
$= (١٠ + ٢ن)\,(١٥ - ٣ن)$

عند س = ٥ ، ع = ٢٠

فإن ن = صفر ، $\frac{دح}{دن} = ١٥٠\text{سم}^{٣}/\text{د}$

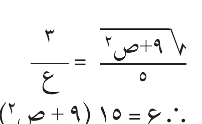
عندما $\frac{دح}{دن} = ٠$ ∴ ن = ٥

يتوقف تغير الحجم بعد ٥ دقائق أخرى






**٤** من التشابه



$\frac{\sqrt{٩ + ص^{٢}}}{٥} = \frac{٣}{ع}$

∴ $ع = ١٥\,(٩ + ص^{٢})^{-\frac{١}{٢}}$

$\frac{دع}{دن} = ١٥ \times -\frac{١}{٢}\,(٩ + ص^{٢})^{-\frac{٣}{٢}} \times ٢ص\,\frac{دص}{دن}$

عند تكون ب عند د فإن قيمة ص = ٤

∴ $\frac{دع}{دن} = -١٥ \times \frac{١}{٢}\,(٢٥)^{-\frac{٣}{٢}} \times ٢ \times ٤ \times \frac{٥}{٤}$

$= -١٥ \times \frac{١}{١٢٥} \times ٥ = -\frac{٣}{٥} = -٠,٦$ متر/د

**٥** مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ أَ بَ

٢٤ = $\frac{١}{٢}$ أَ بَ

٤٨ = أَ بَ

∴ ٠ = أَ $\frac{دبَ}{دن}$ + بَ $\frac{دأَ}{دن}$

عند يكون بَ = ٨ فإن أَ = ٦

$\frac{دأَ}{دن} \times ٨ + ١ \times ٦ = \text{صفر}$ ، $\frac{دأَ}{دن} = -\frac{٣}{٤}$ سم/ث

ظا أ = $\frac{أَ}{بَ}$

قا² أ × $\frac{دأ}{دن}$ = $\frac{بَ\,\frac{دأَ}{دن} - أَ\,\frac{دبَ}{دن}}{بَ^{٢}}$

أ، بَ، حـَ، ب، حـ، أَ

---

المعدلات الزمنية المرتبطة ١ - ٥

### نشاط

تصميم الطرق: فى الطرق الدائرية والكبارى العلوية نتجنب أثر قوة الطرد المركزية على حركة السيارات بتصميم الطرق لتميل على المستوى الأفقى بزاوية قياسها θ نحو الداخل وفقًا للعلاقة د نق ظا θ = ع² حيث (د) عجلة الجاذبية الأرضية، (ع) سرعة السيارة، (نق) طول نصف قطر دائرة المنحنى، أوجد معادلة الارتباط بين معدل تغير سرعة السيارات ومعدل تغير زاوية ميل الطريق. بماذا تنصح قائدى السيارات لتفادي قوة الطرد المركزية.

50 θ نق

### تمـارين الدرس (١ - ٥)

**اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:**

١) إذا زاد طول نصف قطر دائرة بمعدل $\frac{٤}{\pi}$ سم/ث فإن محيط الدائرة يزيد عند هذه اللحظة بمعدل:

أ) $\frac{٤}{\pi}$ ب) $\frac{\pi}{٤}$ ج) $\frac{١}{٨}$ د) ٨

٢) ينصهر مكعب من الثلج محتفظًا بشكله بمعدل ١سم³/ث فإن معدل تغير طول حرف المكعب عندما يكون حجمه ٨ سم³ هو:

أ) $-\frac{١}{١٢}$ ب) $\frac{١}{١٢}$ ج) $-\frac{١}{٦}$ د) $\frac{١}{٦}$

٣) جسم يتحرك على المنحنى ص² = س³ ، إذا كان $\frac{دس}{دن} = \frac{١}{٢}$ وحدة / ث عند ص = - ١ فيكون عند هذه اللحظة $\frac{دص}{دن}$ = ............ وحدة / ث

أ) $-\frac{٣}{٤}$ ب) $-\frac{٣}{٨}$ ج) $\frac{٣}{٤}$ د) $\frac{٣}{٢}$

٤) إذا كان ميل المماس للمنحنى ص = د(س) عند نقطة ما = $\frac{١}{٢}$ وكان الإحداثى السينى لهذه النقطة يتناقص بمعدل ٣ وحدات / ث فإن معدل تغير إحداثيها الصادى يساوى ...

أ) $-\frac{١}{٦}$ ب) $-\frac{٣}{٢}$ ج) $\frac{١}{٦}$ د) $\frac{٣}{٢}$

**أجب عما يأتى:**

٥) تتحرك نقطة على منحنى معادلته س² + ص² - ٤ س + ٨ ص - ٦ = ٠ فإذا كان معدل تغير إحداثيها السينى بالنسبة للزمن عند النقطة (٣، ١) يساوى ٤ وحدات / ث، أوجد معدل تغير إحداثيها الصادى بالنسبة للزمن ن.

٦) سقط حجر فى بحيرة ساكنة فتولدت موجة دائرية يتزايد طول نصف قطرها بمعدل ٤سم/ث. أوجد معدل تزايد مساحة سطح الموجة فى نهاية ٥ ثوانٍ.

٢٩ كتاب الطالب - الصف الثالث الثانوى

---

المعدلات الزمنية المرتبطة ١ - ٥

**مثال** المساحة

٥) ضلعان فى مثلث يتزايد طول كل منهما بمعدل ٠,١سم/ث ، ويتزايد قياس الزاوية المحصورة بينهما بمعدل $\frac{١}{٥}$ د/ث. بأى معدل تتغير مساحة المثلث عند اللحظة التى يكون فيها طول كل ضلع من أضلاع المثلث ١٠سم.

**الحل**

نمذجة المشكلة: نفرض أن عند لحظة زمنية ن يكون طول أحد ضلعى المثلث أَ وطول الآخر بَ وقياس الزاوية المحصورة بينهما جـ ، م مساحة المثلث أ ب جـ دوال قابلة للاشتقاق في ن

حيث م = $\frac{١}{٢}$ أَ بَ جا جـ باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى ن

∴ $\frac{دم}{دن} = \frac{١}{٢}$ أَ بَ $\frac{د}{دن}$[جا جـ] + $\frac{١}{٢}$ جا جـ $\frac{د}{دن}$[أَ بَ]

$\frac{دم}{دن} = \frac{١}{٢}$ أَ بَ جتا جـ $\frac{دجـ}{دن}$ + $\frac{١}{٢}$ جا جـ[أَ $\frac{دبَ}{دن}$ + بَ $\frac{دأَ}{دن}$] (١)

لكن $\frac{دأَ}{دن} = \frac{دبَ}{دن} = ٠,١$ ، $\frac{دجـ}{دن} = \frac{١}{٥}$

أ، بَ، ب، أَ، جـ، $\frac{دجـ}{دن} = \frac{١}{٥}$ د/ث، $\frac{دأَ}{دن} = \frac{دبَ}{دن} = ٠,١$ سم/ث

وعندما يكون طول كل ضلع من أضلاع المثلث ١٠سم يكون المثلث متساوى الأضلاع

فإن ق(∠جـ) = $\frac{\pi}{٣}$ ، جتا جـ = $\frac{١}{٢}$ بالتعويض فى المعادلة (١)

∴ $\frac{دم}{دن} = \frac{١}{٢} \times ١٠ \times ١٠ \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٥} + \frac{١}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}\,[٢ \times ١٠ \times \frac{١}{١٠}]$

$= ٥ + \frac{\sqrt{٣}}{٢} \simeq ٥,٨٦٦$ سم²/ث

أى مساحة المثلث تتزايد عند هذه اللحظة بمعدل ٥,٨٦٦ سم²/ث

**حاول أن تحل**

٥) المساحة: أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى جـ ، مساحته ثابتة وتساوى ٢٤سم²، إذا كان معدل تغير بَ يساوى ١سم/ث فأوجد معدل تغير كل من أَ ، ق (∠أ) عند اللحظة التى يكون فيها بَ يساوى ٨ سم.

تفكير ناقد: إذا كان س (قياس زاوية بالتقدير الدائرى) يتزايد بمعدل زمنى ثابت، فسر لماذا:

أ) يتزايد الجيب والظل بنفس المعدل عند س = ٠

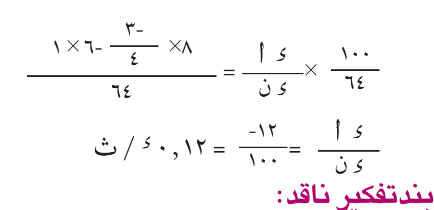
ب) يتزايد الظل بمعدل ٨ مرات قدر تزايد الجيب عند س = $\frac{\pi}{٣}$

ج) يتناقص جيب التمام بمعدل $\frac{٣}{٨}$ مرة قدر تزايد الظل عند س = $\frac{\pi}{٦}$

**مثال** الربط بالفيزياء

٦) فى دائرة كهربية مغلقة، إذا كان جـ فرق الجهد (ڤولت) ، ت شدة التيار (أمبير)، م المقاومة (أوم) وتزايد فرق الجهد بمعدل ١ ڤولت/ ث ، وتناقص شدة التيار بمعدل $\frac{١}{٢}$ أمبير/ث أوجد معدل المقاومة فى اللحظة التى يكون فيها جـ = ١٢ ڤولت ، ت = ٢ أمبير.

٢٧ كتاب الطالب - الصف الثالث الثانوى



$$\frac{\text{١٠٠}}{\text{٦٤}} \times \frac{\text{ءأ}}{\text{ءن}} = \frac{\text{٨} \times \frac{\text{-٣}}{\text{٤}} - \text{٦} \times \text{١}}{\text{٦٤}}$$

$$\frac{\text{ءأ}}{\text{ءن}} = \frac{\text{-١٢}}{\text{١٠٠}} = \text{٠,١٢ ء / ث}$$

**بندتفكير ناقد:**

**يهدف هذا التفكير على قدرة الطالب فى توظيف الدوال المثلثية وإشاراتها فى المعدلات الزمنية.**

أ) $\frac{\text{ء}}{\text{ءن}} \text{ جا س} = \text{جتا س} \times \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$

عند س = صفر

$\therefore \frac{\text{ء}}{\text{ءن}} \text{ جا س} = \text{١} \times \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$

$\frac{\text{ء}}{\text{ءن}} \text{ ظا س} = \text{قا}^{\text{٢}}\text{س} \times \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = \text{١} \times \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$

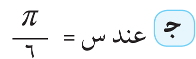
$\therefore \frac{\text{ء}}{\text{ءن}} \text{ جا س} = \frac{\text{ء}}{\text{ءن}} \text{ ظا س}$

ب) عند س = $\frac{\pi}{\text{٣}}$

$\frac{\text{ء}}{\text{ءن}} \text{ جا س} = \text{جتا } \frac{\pi}{\text{٣}} \times \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$

$\frac{\text{ء}}{\text{ءن}} \text{ ظا س} = \text{قا}^{\text{٢}}\text{س} \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = \text{٤} \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$

$\frac{\text{ء}}{\text{ءن}} \text{ ظا س} = \text{٨} \frac{\text{ء}}{\text{ءن}} \text{ جا س}$

ج)  عند س = $\frac{\pi}{\text{٦}}$

$\frac{\text{ء}}{\text{ءن}} \text{ جتا س} = -\text{ جا س} \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = -\frac{\text{١}}{\text{٢}} \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$

$\frac{\text{ء}}{\text{ءن}} \text{ ظا س} = \text{قا}^{\text{٢}}\text{س} \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = \frac{\text{٣}}{\text{٤}} \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$

$\frac{\text{ء}}{\text{ءن}} \text{ ظا س} = -\frac{\text{٣}}{\text{٨}} = \text{جتا } \frac{\text{ءجتاس}}{\text{ءن}}$

## التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

**ناقش مع طلابك ما ورد فى بند حاول أن تحل وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة.**

### الحلول

جـ = ت × م بالاشتقاق بالنسبة للزمن

$\frac{\text{ءجـ}}{\text{ءن}} = \text{ن} \times \frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} + \text{م} \times \frac{\text{ءت}}{\text{ءن}}$

$\text{١} = \text{٢} \times \frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} + \text{٦} \times \frac{\text{١}}{\text{٣}} = \text{٢} \frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} + \text{٢}$

$\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = \frac{\text{-١}}{\text{٢}}$ أوم / ث.

---

الاشتقاق وتطبيقاته

**الحل**

تعلم أن جـ = ت × م باشتقاق الطرفين بالنسبة للزمن

$\therefore \frac{\text{ءجـ}}{\text{ءن}} = \text{ت} \frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} + \text{م} \frac{\text{ءت}}{\text{ءن}}$

$\because \frac{\text{ءجـ}}{\text{ءن}} = \text{١}$ ڤولت / ث ، $\frac{\text{ءت}}{\text{ءن}} = -\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ أمبير / ث

$\therefore$ عند جـ = ١٢ ڤولت ، ت = ٢ أمبير فإن : م = $\frac{\text{جـ}}{\text{ت}} = \frac{\text{١٢}}{\text{٢}}$ = ٦ أوم

ويكون $\text{١} = \text{٢} \times \frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} + \text{٦} \times -\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ $\therefore \frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = \text{٢}$ أوم / ث

أى إن معدل المقاومة فى هذه اللحظة ٢ أوم / ث



**حاول أن تحل**

٦) فى المثال السابق احسب معدل المقاومة إذا كان التيار يتزايد بمعدل $\frac{\text{١}}{\text{٣}}$ أمبير / ث.

**مثال** الربط بالاقتصاد

٧) فيما يلى دوال التكاليف (ك) ، والإيراد (د) والربح (ر) لإحدى شركات تصنيع المصابيح الكهربية الموفرة للطاقة: ك(س) = ١٥٠٠٠ + ٤ س ، د(س) = ٨س - $\frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٢٠٠٠}}$ ، ر(س) = د(س) - ك (س) حيث س الإنتاج اليومى من المصابيح.

أوجد معدل تغير كل من ك، د، ر إذا كان معدل تزايد الانتاج ٩٠ مصباحًا يوميًّا عند تصنيع ١٠٠٠ مصباح.

**الحل**

لاحظ أن كل من س ، ك ، د ، ر دالة فى الزمن والمطلوب حساب $\frac{\text{ءك}}{\text{ءن}}$ ، $\frac{\text{ءد}}{\text{ءن}}$ ، $\frac{\text{ءر}}{\text{ءن}}$ حيث $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ = ٩٠ عندما س = ١٠٠٠

أولًا: $\because$ ك(س) = ١٥٠٠٠ + ٤ س $\therefore \frac{\text{ءك}}{\text{ءن}} = \frac{\text{ءك}}{\text{ءس}} \times \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = \text{٤} \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$

عند س = ١٠٠٠ $\therefore$ معدل تزايد التكاليف = ٤ × ٩٠ = ٣٦٠ جنيهًا / يوم

ثانيًا : $\because$ د(س) = ٨س - $\frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٢٠٠٠}}$ $\therefore \frac{\text{ءد}}{\text{ءن}} = (\text{٨} - \frac{\text{س}}{\text{١٠٠٠}}) \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$

عند س = ١٠٠٠ $\therefore$ معدل تزايد الايراد = (٨ - $\frac{\text{١٠٠٠}}{\text{١٠٠٠}}$) × ٩٠ = ٦٣٠ جنيهًا / يوم

ثالثًا: ر(س) = د(س) - ك(س) $\therefore \frac{\text{ءر}}{\text{ءن}} = \frac{\text{ءد}}{\text{ءن}} - \frac{\text{ءك}}{\text{ءن}}$

عند س = ١٠٠٠ $\therefore$ معدل تزايد الربح = ٦٣٠ - ٣٦٠ = ٢٧٠ جنيهًا / يوم

**حاول أن تحل**

٧) إذا كانت تكاليف إنتاج عدد س من الساعات الرقمية أسبوعيًا ص جنيهًا لتحقق ايرادًا قدره ع جنيهًا حيث: ص = ٤٥٠٠ + ٣ س + ٠,٠٠١ س^٢ ، ع = ٥ س + ٠,٠٠٣ س^٢ أوجد معدل تزايد الربح إذا كان معدل تزايد الإنتاج ٦٠ ساعة أسبوعيًّا عند إنتاج ٣٠٠٠ ساعة .

كتاب الرياضيات البحتة - التفاضل والتكامل ٢٨

---

المعدلات الزمنية المرتبطة ١ - ٥



**نشاط**

تصميم الطرق: فى الطرق الدائرية والكبارى العلوية نتجنب أثر قوة الطرد المركزية على حركة السيارات بتصميم الطرق لتميل على المستوى الأفقى بزاوية قياسها $\theta$ نحو الداخل وفقًا للعلاقة ءنق ظا $\theta$ = ع^٢ حيث (ء) عجلة الجاذبية الأرضية، (ع) سرعة السيارة، (نق) طول نصف قطر دائرة المنحنى، أوجد معادلة الارتباط بين معدل تغير سرعة السيارات ومعدل تغير زاوية ميل الطريق. بماذا تنصح قائدى السيارات لتفادي قوة الطرد المركزية.



**تمارين الدرس (١ - ٥)**

**اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:**

١) إذا زاد طول نصف قطر دائرة بمعدل $\frac{\text{٤}}{\pi}$ سم/ث فإن محيط الدائرة يزيد عند هذه اللحظة بمعدل:

أ) $\frac{\text{٤}}{\pi}$ ب) $\frac{\pi}{\text{٤}}$ ج) $\frac{\text{١}}{\text{٨}}$ د) ٨

٢) ينصهر مكعب من الثلج محتفظًا بشكله بمعدل ١سم٣/ث فإن معدل تغير طول حرف المكعب عندما يكون حجمه ٨ سم٣ هو:

أ) $-\frac{\text{١}}{\text{١٢}}$ ب) $\frac{\text{١}}{\text{١٢}}$ ج) $-\frac{\text{١}}{\text{٦}}$ د) $\frac{\text{١}}{\text{٦}}$

٣) جسم يتحرك على المنحنى ص^٢ = س^٣ ، إذا كان $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}$ وحدة / ث عند ص = - ١ فيكون عند هذه اللحظة $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ = ........ وحدة / ث

أ) $-\frac{\text{٣}}{\text{٤}}$ ب) $-\frac{\text{٣}}{\text{٨}}$ ج) $\frac{\text{٣}}{\text{٤}}$ د) $\frac{\text{٣}}{\text{٢}}$

٤) إذا كان ميل المماس للمنحنى ص = د(س) عند نقطة ما = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ وكان الإحداثى السينى لهذه النقطة يتناقص بمعدل ٣ وحدات / ث فإن معدل تغير إحداثيها الصادى يساوى ...

أ) $-\frac{\text{١}}{\text{٦}}$ ب) $-\frac{\text{٣}}{\text{٢}}$ ج) $\frac{\text{١}}{\text{٦}}$ د) $\frac{\text{٣}}{\text{٢}}$

**أجب عما يأتى:**

٥) تتحرك نقطة على منحنى معادلته س^٢ + ص^٢ - ٤ س + ٨ ص - ٦ = ٠ فإذا كان معدل تغير إحداثيها السينى بالنسبة للزمن عند النقطة (٣، ١) يساوى ٤ وحدات / ث، أوجد معدل تغير إحداثيها الصادى بالنسبة للزمن ن.

٦) سقط حجر فى بحيرة ساكنة فتولدت موجة دائرية يتزايد طول نصف قطرها بمعدل ٤سم/ث. أوجد معدل تزايد مساحة سطح الموجة فى نهاية ٥ ثوانٍ.

٢٩ كتاب الطالب - الصف الثالث الثانوى

## حاول أن تحل (٧)

لاحظ أن كل من س ، ك (س) = ص ، ع = د (س) دوال الزمن

والمطلوب حساب كل من $\frac{ءك}{ءن}$ ، $\frac{ءد}{ءن}$ ، $\frac{ءر}{ءن}$

حيث ر دالة الربح

و حيث $\frac{ءس}{ءن} = ٦٠$ عند انتاج ٣٠٠٠ ساعة.

**اولا:** ص = ك (س) = ٤٥٠٠ + ٣س + ٠,٠٠١ س$^{٢}$

$$\frac{ءك}{ءن} = (٣ + ٠,٠٠١ \times ٢س) \frac{ءس}{ءن}$$

عند س = ٣٠٠٠

∴ معدل تزايد التكاليف = (٣ + ٠,٠٠١ × ٢ × ٣٠٠٠) ٦٠

= ٥٤٠ جنيها / اسبوع

**ثانيا:** ع = د (س) = ٥ س + ٠,٠٠٣ س$^{٢}$

$$\frac{ءع}{ءن} = (٥ + ٠,٠٠٣ \times ٢س) \frac{ءس}{ءن}$$ عند س = ٣٠٠٠

∴ $\frac{ءع}{ءن}$ = (٥ + ٠,٠٠٣ × ٢ × ٣٠٠٠) ٦٠ = ١٣٨٠ جنيها / اسبوع

**ثالثا** : معدل تزايد الربح

$= \frac{ءع}{ءن} - \frac{ءك}{ءن}$ = ١٣٨٠ - ٥٤٠ = ٨٤٠ جنيها / اسبوع

## حلول تمارين (١-٥)

| ١ | ٢ | ٣ | ٤ |
|---|---|---|---|
| د | ب | ب | د |

⑤ $٢س \frac{ءس}{ءن} + ٢ص \frac{ءص}{ءن} - ٤ \frac{ءس}{ءن} + ٨ \frac{ءص}{ءن} = صفر$

$٢ \times ٣ \times ٤ + ٢ \times ١ \frac{ءص}{ءن} - ٤ + ٨ \frac{ءص}{ءن} = صفر$ ، ∴ $\frac{ءص}{ءن} = ٠,٨$

⑥ $نق = نق. + \frac{ءنق}{ءن} \times ن$

نق = ٤ ن ∴ م = π نق$^{٢}$

$$\frac{ءم}{ءن} = π \times ٢نق \times \frac{ءنق}{ءن}$$

= π × ٢ × ٤ن × ٤ = π × ٣٢ × ٥ = ١٦٠π سم$^{٢}$ /ث

⑦ مساحة الشكل السداسى المنتظم = ٣ ل$^{٢}$ جا ٦٠

$م = ٣ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} ل^{٢}$ $\frac{ءم}{ءن} = \frac{٣}{٢}\sqrt{٣} \times ٢ل \times \frac{ءل}{ءن}$

= ٣$\sqrt{٣}$ × ١٠ × ٠,١ = ٣$\sqrt{٣}$ سم$^{٢}$/ث

⑧ نفرض أن الضغط = ص ، الحجم = ح

$ص \propto \frac{١}{ح}$ $ص = م \times \frac{١}{ح}$ .

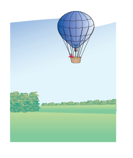


⑦ صفيحة على شكل سداسى منتظم تنكمش بالبرودة ، وُجِدَ أن معدل تغير طول ضلعها ٠,١ سم/ث، أوجد معدل التغير فى مساحة الصفيحة عندما يكون طول ضلعها ١٠سم.

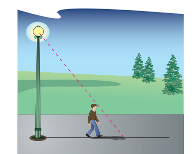
⑧ كتلة معلومة من غاز درجة حرارتها ثابتة، انقص حجمها بمعدل ثابت قدره ٢سم$^{٣}$/ث. فإذا كان الضغط يتناسب عكسيًّا مع الحجم وأن الضغط يعادل ١٠٠٠ ث جم /سم$^{٢}$ عندما يكون الحجم ٢٥٠سم$^{٣}$. أوجد معدل تغير الضغط بالنسبة للزمن عندما يصبح حجم الغاز ١٠٠سم$^{٣}$.

⑨ يتسرب غاز من بالون كرى بمعدل ٢٠سم$^{٣}$/ث أوجد معدل تغير طول نصف قطر البالون فى اللحظة التى يكون فيها طول نصف قطره ١٠سم، ثم أوجد معدل تغير مساحة السطح الخارجى للبالون فى نفس اللحظة.

⑩ سلم طوله ٥ أمتار يرتكز بطرفه العلوى على حائط رأسى وبطرفه السفلى على أرض أفقية، إذا تحرك الطرف السفلى مبتعدًا عن الحائط بمعدل ٤ سم/د عندما يكون الطرف العلوى على ارتفاع ٤ أمتار من الأرض، أوجد معدل انزلاق الطرف العلوى للسلم، ثم أوجد معدل تغير قياس الزاوية بين السلم والأرض عند هذه اللحظة.



⑪ يرتفع بالون رأسيًّا لأعلى من نقطة أ على سطح الأرض. وضع جهاز لتتبع حركة البالون عند نقطة ب فى نفس المستوى الأفقى للنقطة أ وعلى بعد ٢٠٠ متر منها عند لحظة ما رصد الجهاز زاوية ارتفاع البالون فوجدها $\frac{π}{٤}$ وتتزايد بمعدل ٠,١٢ ء / د ، أوجد معدل ارتفاع البالون فى هذه اللحظة.



⑫ يسير رجل طوله ١٨٠ سم مبتعدًا عن قاعدة مصباح ارتفاعه ٣ أمتار بمعدل ١,٢ م/ث، أوجد معدل تغير طول ظل الرجل. و إذا كان المستقيم المار بأعلى نقطة من رأس الرجل وقمة المصباح يميل على الأرض بزاوية قياسها θء عندما يبعد الرجل عن قاعدة المصباح بمسافة قدرها س مترًا فأثبت أن س = $\frac{٦}{٥}$ ظتا θ ، ثم أوجد معدل تغير θ عندما يبعد الرجل مسافة ٣,٦ متر عن قاعدة المصباح.

⑬ مثلث متساوى الساقين طول قاعدته ٢٠$\sqrt{٣}$ . إذا كان طول كل من ساقيه يتناقص بمعدل ٣ سم/ساعة، فأوجد معدل تناقص مساحة سطح المثلث عند اللحظة التى يكون فيها طول كل من الساقين مساويًا لطول القاعدة.

٣٠


كتاب الرياضيات البحتة - التفاضل والتكامل

$١٠٠٠ = م \times \frac{١}{٢٥٠}$ ∴ م = ٢٥ × ١٠$^{٤}$

$ص = ٢٥ \times ١٠^{٤} \times \frac{١}{ح}$

$$\frac{ءص}{ءن} = ٢٥ \times ١٠^{٤} \times \frac{-١}{ح^{٢}} \times \frac{ءح}{ءن}$$

$= ٢٥ \times ١٠^{٤} \times \frac{-١}{١٠٠ \times ١٠٠} \times -٢$ = -٥٠سم$^{٣}$ / ث.

⑪ ظا θ = $\frac{س}{٢٠٠}$ س= ٢٠٠ ظا θ

$$\frac{ءس}{ءن} = ٢٠٠ \times قا^{٢} θ \times \frac{ءθ}{ءن}$$

= ٢٠٠ × ٢ × ٠,١٢ = ٤٨سم / ث

س

θ

٢٠٠م

⑬ أ ب جـ = $\frac{١}{٢} \times ٢٠\sqrt{٣} \times ص$

ص = $\sqrt{س^{٢} - ٣٠٠}$

$$\frac{ءم}{ءن} = ١٠\sqrt{٣} \times \frac{١}{٢} (س^{٢} - ٣٠٠)^{-\frac{١}{٢}} \times ٢س \times \frac{ءس}{ءن}$$

$= ٥\sqrt{٣} (١٢٠٠ - ٣٠٠)^{-\frac{١}{٢}} \times ٢ \times ٢٠\sqrt{٣} \times -٣$

$= - \frac{١٠ \times \sqrt{٣} \times ٢٠ \sqrt{٣} \times -٣}{٣٠}$ = -٦٠سم$^{٢}$/ث



اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

① إذا كان ص = ٤ قا$^{٢}$س فإن ص$'$( $\frac{\pi}{٤}$ ) يساوى:

أ - ٨ ب صفر جـ ٤ $\sqrt{٢}$ د ١٦

② إذا كان ص = جا ٢ س جتا ٢ س فإن ص$''$( $\frac{\pi}{٣}$ ) يساوى:

أ - ٤ ب صفر جـ ٤ $\sqrt{٣}$ د ٨

③ تتحرك نقطة على المنحنى س ص$^{٢}$ = ١٢ ، عند النقطة (٣ ، ٢) يكون $\frac{\text{ء س}}{\text{ء ص}}$ يساوى:

أ - ٤ ب - $\frac{٣}{٢}$ جـ - $\frac{١}{٣}$ د ٣

④ إذا كان ص = ٢ن$^{٣}$ + ٧ ، ع = ن$^{٢}$ - ٤ ، فإن معدل تغير ص بالنسبة إلى ع يساوى:

أ ٢ ن ب ٣ ن جـ ٦ د ١٢

⑤ يتزايد طول نصف قطر دائرة بمعدل ٢سم/د ومساحتها بمعدل ٢٠ $\pi$ سم/د، فإن طول نصف قطرها عند هذه اللحظة يساوى: ........ سم

أ $\frac{٥}{٢}$ ب ٥ جـ ١٠ د ٢٠

أجب عما يأتى:

⑥ أوجد $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ إذا كانت ص تساوى :

أ س + ظتا ٢ س ب $\sqrt[٣]{\text{س}}$ + قا ٥ س جـ ٢ س - ٥ جتا ($\pi$ س)$^{٢}$

د ٢ جتا$^{٢}$ ($\pi$ س + ١) هـ ظا س ظتا س و قا ٢ س ظا ٢ س

⑦ فى الشكل المقابل: أ نقطة تتحرك فى المستوى، $\overline{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة م عند ب ، أ م = س + نق حيث نق طول نصف قطر الدائرة:

أ أثبت أن س = نق ( قتا $\theta$ - ١)

ب أوجد معدل تغير س بالنسبة إلى $\theta$ عندما $\theta = \frac{\pi}{٦}$

⑧ أوجد $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ فى أبسط صورة لكل من:

أ س$^{٢}$ - ٣ص$^{٢}$ + ٩ = ٠ ب ٥ س$^{٢}$ + ١٢ ص$^{٣}$ - ٧ = ٠ جـ س$^{٢}$ - ٢ س ص + ٢ ص$^{٢}$ = ١٤

د (س - ٣)$^{٢}$ + (ص + ٢)$^{٢}$ = ٢٥ هـ س ص + جا س = ٥ و جا س جتا ص = $\frac{١}{٢}$

⑨ أ أوجد معدل تغير ( س + ٣) ( س - ٢) بالنسبة إلى $\frac{\text{س - ٣}}{\text{س + ٢}}$

ب إذا كانت د(س) = $\frac{٢}{\text{س + ١}}$ ، ر(س) = ٣س

أوجد $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}$ [ ( د ∘ ر ) (س) ] عند س = - ٢

٣٢ كتاب الرياضيات البحتة - التفاضل والتكامل

## إجابات التمارين العامة



① د ② جـ

③ جـ ④ ب

⑤ ب

⑥ أ ١ - ٢ قتا$^{٢}$ ٢س ب $\frac{١}{٣}$ س$^{-\frac{٢}{٣}}$ + ٥ قا ٥س ظا ٥س

جـ ٢ + ٥ جا ($\pi$ س)$^{٢}$ × ٢$\pi$س × $\pi$

= ٢ + ١٠$\pi^{٢}$س جا ($\pi$س)$^{٢}$

د ٤ جتا ($\pi$س + ١) × - جا ($\pi$س + ١) × $\pi$

= -٤$\pi$ جا ($\pi$ س + ١) جتا ($\pi$ س + ١)

= -٢$\pi$ جا ٢ ($\pi$ س + ١)

هـ صفر

⑨ أ = $\frac{\text{( ٢ س + ١) (س + ٢)}^{٢}}{٥}$

⑩ ب س × $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ + ص = أ جتا أ س

س × $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ء س}^{٢}}$ + $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ + $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = - أ$^{٢}$ جا أ س

س × $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ء س}^{٢}}$ + ٢ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = -أ$^{٢}$ س ص

س $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ء س}^{٢}}$ + ٢ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ + أ$^{٢}$ س ص = صفر

جـ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = - أ جا س$^{٢}$ × ٢ س + ب جتا س$^{٢}$ × ٢ س

= ٢س(-أ جا س$^{٢}$ + ب جتا س$^{٢}$)

$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ء س}^{٢}}$ = ٢ (-أ جا س$^{٢}$ + ب جتا س$^{٢}$ )

+٢ س ( - أ جتا س$^{٢}$ × ٢س - ب جا س$^{٢}$ × ٢س)

= ٢ ( - أ جا س٢ + ب جتا س$^{٢}$)

- ٤س$^{٢}$ ( أ جتا س$^{٢}$ + ب جا س$^{٢}$) بالضرب فى س

س $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ء س}^{٢}}$ = $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ - ٤ س$^{٣}$ ص

س $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ء س}^{٢}}$ - $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ء س}}$ + ٤س$^{٣}$ ص = ٠

⑪ أ ٢ س - $\sqrt{٣}$ ص - $\sqrt{٣}$ س $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ + ٤ص $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ٠

٢ $\sqrt{٣}$ - ٣ $\sqrt{٣}$ - ٣ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ + ١٢ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ٠

$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٩}$

معادلة المماس ص - ٣ = $\frac{\sqrt{٣}}{٩}$ ( س - $\sqrt{٣}$ )

٩ ص - ٢٧ = $\sqrt{٣}$ س - ٣

٩ ص - $\sqrt{٣}$ س - ٢٤ = ٠

العمودى ص -٣ = $\frac{-٩}{\sqrt{٣}}$ ( س - $\sqrt{٣}$ )

$\sqrt{٣}$ ص - ٣ $\sqrt{٣}$ = - ٩ س + ٩ $\sqrt{٣}$

$\sqrt{٣}$ ص + ٩س - ١٢ $\sqrt{٣}$ = ٠

⑭ ميل المماس للمنحنى الأول عند النقطة (٠ ، ٠)

٤ص$^{٣}$ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ + ٩ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ٦

$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = $\frac{٦}{٩}$ = $\frac{٢}{٣}$

ميل المماس للمنحنى الثانى عند النقطة (٠ ، ٠)

٢س - ٢ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ٣ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = - $\frac{٣}{٢}$ .

م$_{١}$ × م$_{٢}$ = -١

∴ المنحنيين متقاطعان على التعامد عند النقطة (٠، ٠)

⑮ النقطة ( أ ، ب) تحقق معادلة المنحنى والمستقيم

ميل المماس للمنحنى

ن $\left(\frac{\text{س}}{\text{أ}}\right)^{\text{ن-١}}$ + ن $\left(\frac{\text{ص}}{\text{ب}}\right)^{\text{ن-١}}$ × $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ٠

$\frac{دص}{دس} = -\frac{ب}{أ}\left(\frac{ب س}{أ ص}\right)^{ن-١}$

$\frac{دص}{دس} = -\frac{ب}{أ}$ (أ ، ب)

المستقيم $\frac{ص}{ب} = -\frac{س}{أ} + ٢$

ص $= -\frac{ب}{أ}$ س $+ ٢$ ب        ميل المماس $= \frac{-ب}{أ}$

**١٦** أ دالة الإيراد الحدى د/(س) = ١٠٠٠ - ٤٠ س

ب د/(٢٠) = ١٠٠٠ - ٤٠ × ٢٠ = ٢٠٠

جـ د/(س) = صفر ∴ ١٠٠٠ - ٤٠ س = ٠ ∴ س = ٢٥

**١٧** $\frac{دف}{دن} = ٩ ن^٢ + ٦ ن$

$\frac{دف}{دن} = ٩ \times ٩ + ٦ \times ٣ = ٩٩$ سم / ث

**١٨** نفرض أن حجم البالون ح $= \frac{٤}{٣}\pi نق^٣$

$\frac{دح}{دن} = س = ٤\pi نق^٢ \frac{دنق}{دن}$

$\frac{دنق}{دن} = \frac{س}{٤\pi نق^٢}$

مساحة سطح البالون = م $= ٤\pi نق^٢$

$\frac{دم}{دن} = ٨\pi نق \frac{دنق}{دن}$

$= ٨\pi نق \times \frac{س}{٤\pi نق^٢} = \frac{٢س}{نق}$ سم$^٢$ / ن

**١٩** ∵ $ص^٢ = ٤س$

∴ $٢ص \frac{دص}{دن} = ٤ \times \frac{دس}{دن}$

$٢ \times -٤ \times \frac{دص}{دن} = ٤ \times ٢$ ∴ $\frac{دص}{دن} = -١$ وحدة / ث

**٢١** $\frac{دص}{دن} = -$ ك وحدة/ ث

س = ل جتا $\theta$ ، ص = ل جا $\theta$

$س = \frac{٣}{٥}ل$ ، $ص = \frac{٤}{٥}ل$

$س^٢ + ص^٢ = ل^٢$

$٢س \frac{دس}{دن} + ٢ص \frac{دص}{دن} = ٠$

$\frac{٣}{٥}ل \times -ك + \frac{٤}{٥}ل \times \frac{دص}{دن} = ٠$

$\frac{دص}{دن} = \frac{٣}{٤}ك$

**١٠** أ إذا كانت ص $= \sqrt{٢س + ٥}$        أثبت أن (٢ س + ٥) $\frac{د^٣ص}{دس^٣} + ٣ \frac{د^٢ص}{دس^٢} = ٠$

ب إذا كانت : س ص = جا أ س        أثبت أن س $\frac{د^٢ص}{دس^٢} + ٢ \frac{دص}{دس} + أ^٢ س ص = ٠$

جـ إذا كانت ص = أ جتا س$^٢$ + ب جا س$^٢$        أثبت أن : س $\frac{د^٢ص}{دس^٢} - \frac{دص}{دس} + ٤س^٣ ص = ٠$

**١١** أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنيات التالية عند النقط المعطاة:

أ $س^٢ - س ص \sqrt{٣} + ٢ص^٢ = ١٢$        $(\sqrt{٣}$ ، ٣)

ب س جا ٢ ص = ص جتا ٢ س        $(\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{\pi}{٢})$

**١٢** أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنيات التالية عند القيم المعطاة:

أ $س = ن^٢ + ٢ ن + ٣$ ، $ص = ٢ن^٣ - ٦ ن + ١$   عند ن = ٠

ب $س = قا^٢ \theta - ١$ ، ص = طا$\theta$        عند $\theta = \frac{-\pi}{٤}$

**١٣** أوجد مساحة المثلث المحدود بمحور الصادات، المماس، العمودى عليه للمنحنى   $٤س^٢ + ص^٢ = ٢٠$ عند النقطة (١ ، -٤).

**١٤** أثبت أن المنحنيين $ص^٤ + ٩ص = ٦س$ ، $س^٢ - ٢ ص = ٣ س$  متقاطعان على التعامد عند نقطة الأصل.

**١٥** أثبت أن المنحنى $(\frac{س}{أ})^ن + (\frac{ص}{ب})^ن = ٢$ يمس المستقيم $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ٢$ عند النقطة (أ ، ب) مهما تكن قيمة ن.

**١٦** إذا كانت د(س) = ١٠٠٠س - ٢٠س$^٢$ دالة الإيراد الكلى لبيع س وحدة أوجد:

أ دالة الإيراد الحدى.

ب الإيراد الحدى عند بيع ٢٠ وحدة.

جـ عدد الوحدات المباعة التى ينعدم عندها الإيراد الحدى.

**١٧** إذا تحركت نقطة مادية فى خط مستقيم وكانت العلاقة بين المسافة والزمن هى ف $= ٣ن^٣ + ٣ن^٢ - ٤$ حيث ف بالسنتيمترات، د بالثوانى . أوجد معدل تغير المسافة بالنسبة للزمن فى نهاية ٣ ثوانٍ.

**١٨** بالون كُروي مملوء بالغاز يتسرب منه الغاز بمعدل س سم$^٣$/ث ، أثبت أن معدل نقص مساحته فى اللحظة التى يكون فيها طول نصف قطره نق سم يساوى $\frac{٢س}{نق}$ سم$^٢$/ث.

**١٩** نقطة تتحرك على المنحنى $ص^٢ = ٤س$ إذا كان معدل تغير إحداثيها السينى بالنسبة للزمن عند النقطة (٤، -٤) يساوى ٢ وحدة/ث فأوجد معدل تغير إحداثيها الصادى بالنسبة للزمن.

**٢٠** مستطيل طوله ٢٤سم وعرضه ١٠سم يتناقص طوله بمعدل ٢سم/ ث، بينما يتزايد عرضه بمعدل ١,٥سم/ث، أوجد معدل تغير مساحته بعد مضى ٤ ثوانٍ، ثم أوجد الزمن الذى تتوقف فيه المساحة عن التغير . كم تكون مساحة المستطيل حينئذ؟

٣٣    كتاب الطالب - الصف الثالث الثانوى

**٢١** سلم ثابت الطول ينزلق طرفه العلوى على حائط رأسى بمعدل ك وحدة / ث، أوجد معدل ابتعاد طرفه السفلى عن الحائط عندما يميل السلم على الرأسى بزاوية $\theta$ حيث قتا $\theta = \frac{٥}{٤}$.

**٢٢** يتمدد هرم رباعى منتظم من المعدن ارتفاعه يساوى طول ضلع قاعدته فيزداد حجمه بمعدل ١سم$^٣$/ث، إذا كان معدل تزايد كل من ارتفاع الهرم وطول ضلع قاعدته يساوى ٠,٠١ سم/ث فأوجد طول ضلع قاعدته.

**٢٣** سلم طوله ٢,٦ متر يستند بطرفه العلوى على حائط رأسى وبطرفه السفلى على أرض أفقية. إذا كان طرفه السفلى يتحرك مبتعدًا عن الحائط بمعدل ٤ متر/د عندما يكون على بعد ١ متر من الحائط . أوجد معدل تحرك طرفه العلوى ومعدل تغير قياس زاوية ميل السلم على الأرض حينئذ.

**٢٤** متوازى مستطيلات أبعاده ٣، ٤، ١٢ من السنتيمترات إذا كان معدل تزايد بعده الأول ٢سم/ث ومعدل تزايد بعده الثانى ١سم/ث، ومعدل تناقص بعده الثالث ٣ سم/ث ، فأوجد حجم متوازى المستطيلات فى أى لحظة زمنية ن. ومعدل تغير حجمه فى نهاية ٢ ثانية .

**٢٥** إذا كان الطلب على سلعة يخضع للعلاقة $٣س^٢ + ٤ص^٢ = ١٢١٦$ حيث س عدد الوحدات المطلوبة ، ص السعر بالجنيهات . أوجد الإيراد الحدى عند س = ٨ وحدات.

**٢٦** خزان بترول على شكل أسطوانة دائرية قائمة طول قطر قاعدتها ٢٤ مترًا. يُراد تفريغ الخزان من البترول بمعدل ٢م$^٣$/د ، فما معدل تغير ارتفاع البترول فى الخزان؟

**٢٧** ترتفع طائرة عمودية رأسيًّا لأعلى بمعدل ثابت قدره ٤٢ م/د فإذا تم رصد الطائرة من مشاهد على الأرض و يبعد ١٥٠ م عن موقع إقلاعها ، فأوجد معدل تغير زاوية ارتفاع نظر المشاهد للطائرة عندما تكون على ارتفاع ١٥٠م من سطح الأرض.

**٢٨** فى سباق ١٠٠ متر، يجرى لاعب فى مسار مستقيم باتجاه نقطة النهاية، وكانت إحدى الكاميرات ترصد حركته من مسافة ٥ أمتار وعمودية على مسار السباق وفى نفس المستوى الأفقى للمتسابقين . أوجد سرعة تغير الزاوية التى تدور بها الكاميرا لرصد حركة اللاعب عندما كان على بعد ٥ أمتار من نهاية السباق ومعدل اقترابه لنقطة النهاية ١٠م/ث.

**٢٩** تتحرك النقطة أ (س ، ص) على منحنى الدالة ص = س$^٣$ + س بحيث $\frac{دص}{دن} = ٢$ سم / ث أوجد معدل التغير فى مساحة المثلث أ و ب حيث (و) نقطة الأصل ، النقطة ب (٠ ، ٦) فى اللحظة التى يكون فيها الإحداثى السينى للنقطة المتحركة يساوى ٣.

٣٤    كتاب الرياضيات البحتة - التفاضل والتكامل

## اختبار تراكمي

**اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:**

(١) إذا كانت د(س) = ظتا س فإن $د''(\frac{\pi}{٤})$ تساوى :

أ $-\frac{٤}{٩}$    ب $\frac{٤}{٩}$    ج ٤    د $\frac{٩}{٢}$

(٢) تتحرك نقطة على المنحنى ص$^٢$ = ٢٥ - س$^٢$ بحيث $\frac{ءس}{ءن} = \frac{١}{٢س + ٣}$ فإن: عند النقطة (-٣ ، ٤)، $\frac{ءص}{ءن}$ تساوى:

أ $-\frac{١}{٤}$    ب $\frac{١}{٤}$    ج $\frac{١}{٩}$    د ٩

(٣) إذا كان معادلة العمودى للمنحنى ص = د(س) عند النقطة (١ ، ١) هى س + ٤ ص= ٥ فإن د'(١) تساوى:

أ -٣    ب $-\frac{١}{٤}$    ج ٤    د -٤

(٤) المماس للمنحنى ص = ٣س$^٢$ - ٥ عند النقطة (١، -٢) يمر بالنقطة:

أ (٥ ، -٢)    ب (٣ ، ١)    ج (٢ ، -٤)    د (٠ ، -٨)

**أجب عن الأسئلة الآتية:**

(٥) إذا كانت س = ن - ن$^٢$ ، ص = ن - ن$^٣$ أوجد $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$

(٦) المعادلتان البارامتريتان لمنحنى هما س = ن$^٢$ - ٦ ن ، ص = ٨ $\sqrt{ن - ٢}$ أوجد معادلة المماس للمنحنى عند ن = ٦

(٧) أ ب جـ مثلث مساحته م ، النقطة جـ تتحرك على المستقيم ص = ٢ س، فإذا كان أ (ل ، ٠) ، ب (٠ ، ك) حيث ل ، ك ثابتان أثبت أن $\frac{ءم}{ءس} = أ + \frac{ب}{٢}$

(٨) أوجد معدل تغير $\sqrt{٩ + س^٢}$ بالنسبة إلى $\frac{س}{س - ١}$ عند س = -٤

(٩) أ إذا كان ص = ٤ + ظتا س - قا$^٢$ س، أوجد معادلة العمودى عند س = $\frac{\pi}{٤}$

ب مُثمن منتظم طول ضلعه ١٠ سم و يتزايد بمعدل ٠,٢ سم/ث أوجد معدل تزايد مساحته.

(١٠) سلم طوله ٤ أمتار يرتكز بأحد طرفيه على حائط رأسى وبطرفه الآخر على أرض أفقية، فإذا انزلق الطرف الملامس للأرض مبتعدًا عن الحائط بمعدل ٢٠ سم/ث . احسب معدل هبوط الطرف العلوى للسلم عندما يكون السلم مائلًا على الأرض بزاوية قياسها $\frac{\pi}{٣}$.

**إذا لم تستطع الإجابة عن أحد هذه الأسئلة يمكنك الاستعانة بالجدول الآتى:**

| رقم السؤال | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ | ٧ | ٨ | ٩ أ | ٩ ب | ١٠ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| أرجع إلي | ٣ | ٢ | ٤ | ٤ | ٢ | ٢ | ٢ | ٢ | ٤ | ٥ | ٥ |

كتاب الطالب – الصف الثالث الثانوى    ٣٥

(٢٦) حجم الاسطوانة مساحة القاعدة × الارتفاع

$ح = \pi نق^٢ ع$    $\therefore \frac{ءح}{ءن} = \pi نق^٢ \times \frac{ءع}{ءن}$

$-٢ = \pi \times ١٤٤ \times \frac{ءع}{ءن}$    $\therefore \frac{ءع}{ءن} = \frac{-١}{٧٢\pi}$ سم/ث

(٢٨) $\frac{ءس}{ءن} = -١٠$ م/ث

$ظا\theta = \frac{س}{٥}$

$س = ٥ ظا\theta$

$\frac{ءس}{ءن} = ٥ \times قا^٢\theta \times \frac{ء\theta}{ءن}$

$-١٠ = ٥ \times \frac{٢٥}{٢٥ \times ٢} \times \frac{ء\theta}{ءن}$

$\frac{ء\theta}{ءن} = \frac{-٢٠}{٥٠} = -٤ء / ث\ ١٠٠م$

(٢٩) $ص = س^٣ + س$

$\frac{ءص}{ءن} = ٣س^٢ \frac{ءس}{ءن} + \frac{ءس}{ءن}$

$٢ = (٣ \times ٩ + ١) \frac{ءس}{ءن}$

$\frac{ءس}{ءن} = \frac{١}{١٤}$ سم/ث

م △ أوب = $\frac{١}{٢} \times ٦ \times س$ .

$\frac{ءم}{ءن} = ٣ \times \frac{ءس}{ءن} = \frac{٣}{١٤}$ سم$^٢$/ث

## اختبار تراكمى على الوحدة

### اسئلة الاختبار

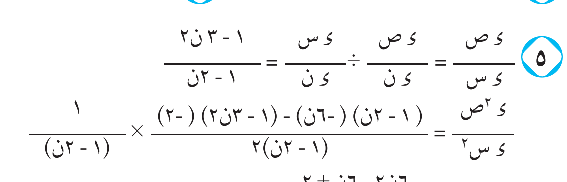




(١) ج    (٢) أ

(٣) ج    (٤) د





(٥) $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءن} \div \frac{ءس}{ءن} = \frac{١ - ٣ن^٢}{١ - ٢ن}$

$\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = \frac{(١ - ٢ن)(-٦ن) - (١ - ٣ن^٢)(-٢)}{(١ - ٢ن)^٢} \times \frac{١}{(١ - ٢ن)}$

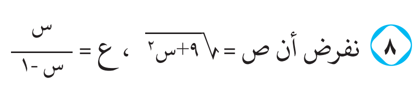
$= \frac{٦ن^٢ - ٦ن + ٢}{(١ - ٢ن)^٣}$

(٦) عند ن = ٦ ∴ س = صفر ، ص = ١٦    النقطة (٠ ، ١٦)

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءن} \div \frac{ءس}{ءن} = \frac{٨ \times ١}{٢\sqrt{ن - ٢}} \div (٢ن - ٦)$

$= \frac{٤}{٢} \div ٦ = \frac{١}{٣}$

معادلة المماس ص - ١٦ = $\frac{١}{٣}$ س    ٣ص - س - ٤٨ = ٠

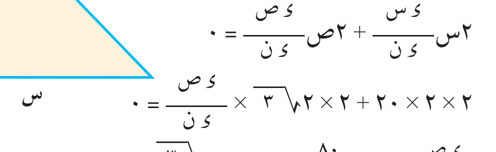


(٨) نفرض أن ص = $\sqrt{٩ + س^٢}$ ، ع = $\frac{س}{س - ١}$

$\frac{ءص}{ءع} = \frac{ءص}{ءس} \div \frac{ءع}{ءس}$

$= \frac{١}{٢}(٩ + س^٢)^{-\frac{١}{٢}} \times ٢س \div \frac{(س - ١) - س}{(س - ١)^٢}$

$= \frac{-س}{\sqrt{٩ + س^٢}} \times (س - ١)^٢ = \frac{٤}{٥} \times ٢٥ = ٢٠$



(١٠) $س^٢ + ص^٢ = ١٦$

$٢س \frac{ءس}{ءن} + ٢ص \frac{ءص}{ءن} = ٠$

$٢ \times ٢ \times ٢٠ + ٢ \times ٢\sqrt{٣} \times \frac{ءص}{ءن} = ٠$

$\frac{ءص}{ءن} = -\frac{٨٠}{٤\sqrt{٣}} = -\frac{٢٠\sqrt{٣}}{٣}$ سم / ث



## الوحدة الثانية

# تفاضل وتكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية

# The Calculus of Exponential and Logarithmic Funetions

## مقدمة الوحدة

تبدأ هذه الوحدة بتعريف العدد النيبيرى (هـ) من خلال النهايات

$$\lim_{س \to ٠} (١ + س)^{\frac{١}{س}} = هـ \quad ، \quad \lim_{س \to \infty} (١ + \frac{١}{س})^{س} = هـ$$

وبالتالى التعرف على الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية للأساس (هـ) مع إعطاء الطالب بعض خواص اللوغاريتم الطبيعى ومن ثم إيجاد النهايات للوغاريتم الطبيعى مع إعطاء تطبيقات حياتية على ذلك.

وفى الدرس الثانى من هذه الوحدة تناول مشتقات الدوال الأسية واللوغاريتمية والمشتقات العليا لهذه الدوال.

إما الدرس الثالث والأخير من هذه الوحدة فقد تناول تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية مع إعطاء تطبيقات هندسية وفيزيائية عليها.

## مخرجات التعلم:

**فى نهاية الوحدة وتنفيذ الأنشطة فيها من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:**

- يتعرف مفهوم العدد النيبيرى هـ من خلال النهايات

$$\lim_{س \to ٠} (١ + س)^{\frac{١}{س}} = هـ \quad ، \quad \lim_{س \to \infty} (١ + \frac{١}{س})^{س} = هـ$$

- يوجد بعض النهايات التى تؤول إلى العدد هـ ومضاعفاته

$$\lim_{س \to \infty} (١ + \frac{١}{س})^{٢س} = \lim_{س \to \infty} [(١ + \frac{١}{س})^{س}]^{٢} = هـ^{٢}$$

- يتعرف مفهوم اللوغاريتم الطبيعى $لو_{هـ}$ من خلال النهاية

$$\lim_{س \to ٠} \frac{أ^{س} - ١}{س} = لو_{هـ} أ$$

- يتعرف بعض خواص اللوغاريتم الطبيعى مثل:
  - $لو_{هـ} س = ص \Leftrightarrow هـ^{ص} = س$
  - $هـ^{لو_{هـ} س} = س \quad ، \quad س > ٠$
  - $لو_{هـ} هـ = ١ \quad ، \quad لو_{أ} س = \frac{لو_{هـ} س}{لو_{هـ} أ}$
- يوجد مشتقات الدوال الأسية $ص = هـ^{س}$ ، $ص = أ^{س}$ ، ومشتقة الدالة اللوغاريتمية $ص = لو_{هـ} س$ ، $ص = لو_{أ} س$
- تكامل الدوال $ص = هـ^{س}$ ، $لو_{هـ} س$



الوحدة الثانية

تفاضل وتكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية

The Calculus of Exponential and Logarithmic Functions

مقدمة الوحدة

فى هذه الوحدة، نتعرف العدد النيبيرى هـ نسبةً إلى العالم الاسكتلندى جون نابيير Johan napier (١٥٥٠ - ١٦١٧م) الذى أدخل مفهوم اللوغاريتمات إلى الرياضيات، كما يسمى أيضًا عدد أويلر Euler تكريمًا للعالم الذى درسه باستفاضة هو والدوال المرتبطة به واكتشافه للعلاقة $هـ^{\pi i} + ١ = ٠$ بين أهم خمسة ثوابت فى الرياضيات والتى تربط بين الدوال المثلثية والدوال الأسية والأعداد المركبة.

والعدد هـ عدد حقيقى غير نسبى يساوى تقريبًا ٢,٧١٨٢٨١٨٢٨٤٥٩ له أهمية كبيرة فى الرياضيات، حيث اتخذ أساسًا لدالة الأس الطبيعى $هـ^{س}$ [exp(x)] ، ودالة اللوغاريتم الطبيعى $لو_{هـ} س$ [ln (x)] وسوف نتناول فى هذه الوحدة دراسة كل من هذه الدوال ومشتقاتها وكذلك مشتقاتها العكسية (التكامل) مع استخدام البرامج الرسومية لحل مشكلات رياضية وحياتية فى مجالات مختلفة.

أهداف الوحدة

**فى نهاية هذه الوحدة وبعد تنفيذ الأنشطة فيها ، من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:**

- يتعرف مفهوم العدد النيبيرى هـ من خلال النهايات $\lim_{س \to ٠} (١ + س)^{\frac{١}{س}} = هـ$ ، $\lim_{س \to \infty} (١ + \frac{١}{س})^{س} = هـ$
- يوجد بعض النهايات التى تؤول إلى العدد هـ ومضاعفاته $\lim_{س \to \infty} (١ + \frac{١}{س})^{٢س} = \lim_{س \to \infty} [(١ + \frac{١}{س})^{س}]^{٢} = هـ^{٢}$
- يتعرف مفهوم اللوغاريتم الطبيعى $لو_{هـ}$ من خلال النهاية $\lim_{س \to ٠} \frac{أ^{س} - ١}{س} = لو_{هـ} أ$
- يتعرف بعض خواص اللوغاريتم الطبيعى مثل:
  - $لو_{هـ} س = ص \Leftrightarrow هـ^{ص} = س$
  - $هـ^{لو_{هـ} س} = س \quad ، \quad س > ٠$
  - $لو_{هـ} هـ = ١ \quad ، \quad لو_{أ} س = \frac{لو_{هـ} س}{لو_{هـ} أ}$
- يوجد مشتقات الدوال الأسية $ص = هـ^{س}$ ، $ص = أ^{س}$ ، ومشتقه الدالة اللوغاريتمية $ص = لو_{هـ} س$ ، $ص = لو_{أ} س$
- تكامل الدوال $ص = هـ^{س}$ ، $لو_{هـ} س$



المصطلحات الأساسية

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| أس | Exponent | معادلة أسية | Exponential Equation | المشتقة العكسية | Antiderivative |
| قوة | Power | لوغاريتم | Logarithm | تكامل | Integration |
| أساس | Base | صورة | Form | ثابت اختيارى | Arbitrary constant |
| أسس كسرية | Rational Exponents | لوغاريتم معتاد | Common Logarithm | تكامل غير محدد | Indefinite integral |
| نمو أسى | Exponential Growth | لوغاريتم طبيعى | Natural Logarithm | | |
| تضاؤل أسى | Exponential Decay | ثابت نابيير | Napier`s Constant | | |
| دالة أسية | Exponential Function | تفاضل لوغاريتمى | Logarithmic Differentiation | | |

دروس الوحدة

الدرس (٢ - ١): دالة الأساس الطبيعى واللوغاريتم الطبيعى.
الدرس (٢ - ٢): مشتقات الدوال الأسية واللوغاريتمية.
الدرس (٢ - ٣): تكامل الدوال الأسية واللوغاريتيمة.

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

مخطط تنظيمى للوحدة



## زمن تدريس الوحدة :

(٦ حصص)

## مهارات التفكير التى تنميها الوحدة:

التفكير الناقد - التفكير الابداعى - التفكير التحليلى - حل المشكلات.

## الوسائل التعليمية المستخدمة:

السبورة التعليمية - سبورة مربعات - طباشير ملون - آلة حاسبة علمية - حاسب آلى مزود ببرامج رسومية (Geo Gebra).

## طرق التدريس المقترحة:

العرض المباشر - المناقشة - العصف الذهنى - الطريقة الاستباطية - التعلم التعاونى - حل المشكلات.

## طرق التقييم المقترحة

يتمثل فى الأسئلة الشفهية والتحريرية الفردية والجماعية أثناء الدرس وبعد الدرس، والأنشطة المقترحة وسلم النشاط الخاص بكل منها والتكاليف الجماعية والفردية وتدريبات عامة على الوحدة والأختبار التراكمى فى نهاية الوحدة.

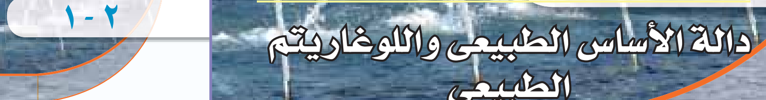
## المخطط التنظيمى للوحدة

**ويتناول الآتى:**

التعرف على كل من الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية ومن ثم يتعرف العدد النيبيرى (هـ) الذى ينقسم بدورة إلى دالة الأساس الطبيعى، دالة اللوغاريتم الطبيعى حيث يشتق الطالب هذه الدوال و يقوم إيضًا بتكامل تلك الدوال.

و يختتم المخطط بتطبيقات على هذه الدوال تتناول الآتى:

- تطبيقات هندسية
- تطبيقات اقتصادية
- تطبيقات فيزيائية
- تطبيقات حياتية



# ٢ - ١ دالة الأساس الطبيعى واللوغاريتم الطبيعى

Natural Exponential and Logarithmic Functions

## خلفية:

سبق للطالب دراسة الدالة الأسية وهى على الصورة د(س) = أس لكل س ∈ ح وتعرف على بعض خواصها، لذلك يمكنه تعريف العدد (هـ) من العلاقة:

$$\text{هـ} = \underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهــا}} \left(1 + \frac{1}{\text{س}}\right)^{\text{س}}$$

أى أن: $\text{هـ} = \underset{\text{س} \to 0}{\text{نهــا}} (1 + \text{س})^{\frac{1}{\text{س}}}$

وفى هذا الدرس سوف يتعرف الطالب على دالة اللوغاريتم الطبيعى وخواصه وفى نهاية الدرس سيقوم بحل تطبيقات اللوغاريتمات الطبيعية.

## مخرجات الدرس:

**فى نهاية هذا الدرس وتنفيذ الأنشطة فيه من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:**

- يتعرف العدد النيبيرى (هـ) من خلال دراسته للنهايات.
- يوجد نهاية دالة تؤدى إلى العدد (هـ) ومضاعفاته.
- يتعرف على دالة الأساس الطبيعى.
- يتقن مفهوم اللوغاريتم الطبيعى من خلال النهايات.

## مفردات اساسية

- دالة الأساس الطبيعى.
- دالة اللوغاريتم الطبيعى.

## المواد التعليمية المستخدمة:

السبورة التعليمية - طباشير ملون - آلة حاسبة علمية - برامج رسومية للحاسوب.

## مكان التدريس:

الفصل الدراسى

## مصادر التعلم:

- كتاب الطالب من ص(٣٨) حتى ص (٤٤)
- الشبكة الدولية للمعلومات

٢ - ١ دالة الأساس الطبيعى واللوغاريتم الطبيعى

Natural Exponential and Logarithmic Functions

**سوف تتعلم**

- مفهوم العدد النيبيرى هـ من خلال النهايات.
- إيجاد نهاية دالة تؤدى إلى العدد هـ ومضاعفاته.
- تعرُّف دالة الأساس الطبيعى.
- مفهوم اللوغاريتم الطبيعى من خلال النهايات.

**المصطلحات الأساسية**

- دالة الأساس الطبيعى Natural Exponential
- دالة اللوغاريتم الطبيعى Natural Logarithmic Functions

**الأدوات المستخدمة**

- آلة حاسبة علمية.
- حاسب آلى مزود ببرامج رسومية.
- الشبكة العنكبوتية

ابحث عن العدد هـ ورمزه (e) فى الشبكة العنكبوتية لتعرف عنه المزيد.

**استكشف**

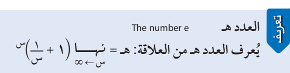
سبق أن درست الدالة الأسية: د(س) = أ^س حيث س ∈ ع، أ ∈ ع^+ - {١} وعلمت أن منحناها يمر بالنقط (٠، ١)، (١، أ)، (-١، $\frac{1}{\text{أ}}$)

- هل جميع منحنيات الدوال الأسية تمر بالنقطة (٠، ١)؟ فسر إجابتك.
- إذا مرَّ منحنى الدالة الأسية د بالنقطة (١، ٣)، ما قيمة الأساس أ؟
- ارسم منحنى الدالة د حيث د(س) = هـ^س أى f(x) = exp(x) مستخدمًا برنامج geogebra أو أى برنامج رسومى آخر. هل تستطيع اكتشاف قيمة تقريبية للعدد هـ؟

استكشف $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهــا}} (1 + \frac{1}{\text{س}})^{\text{س}}$ مستخدمًا حاسبة الجيب فى إكمال الجدول المقابل.

- هل تقترب هذه النهاية من القيمة التقريبية السابق تعينها للعدد هـ؟ ماذا تستنتج؟
- هل $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهــا}} (1 + \frac{1}{\text{س}})^{\text{س}} = \underset{\text{س} \to 0}{\text{نهــا}} (1 + \text{س})^{\frac{1}{\text{س}}}$؟ فسر إجابتك.

| س | $(1 + \frac{1}{\text{س}})^{\text{س}}$ |
|---|---|
| ٢ | $(1 + \frac{1}{2})^2 = 2{,}25$ |
| ١٠ | |
| ١٠٠ | |
| ١٠٠٠ | |
| ١٠٠٠٠ | |
| ١٠٠٠٠٠ | |



**تعريف** العدد هـ The number e

يُعرف العدد هـ من العلاقة: $\text{هـ} = \underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهــا}} (1 + \frac{1}{\text{س}})^{\text{س}}$

**لاحظ أن**

١) يمكن إيجاد قيمة هـ باستخدام حاسبة الجيب بالضغط على المفاتيح

ابدأ → Shift ln 1 =

نجد أن هـ ≃ ٢,٧١٨٢٨١٨٢٨ لأقرب ٩ أرقام عشرية

٣٨ كتاب الرياضيات البحتة - التفاضل والتكامل

## تهيئة:

- اطلب إلى الطلاب تعريف الدالة الأسية من خلال رسم منحناها والتعرف على بعض خواصها الأساسية ثم ملء الجدول المرفق فى ص (٣٨).

ثم استنتاج أنه عندما س ⟵ ∞

فإن $(1 + \frac{1}{\text{س}})^{\text{س}}$ ⟵ ٢,٧ حيث يمكن إيجاد هذه القيمة باستخدام الآلة الحاسبة العلمية وذلك باستخدام مفتاح (ln) ويسمى هذا العدد بالعدد النيبيرى (هـ) حيث

هـ ≃ ٢,٧١٨٢٨١٨٢٨ وهو مقرب لأقرب ٩ أرقام عشرية

- ناقش مع طلابك ما جاء فى مثال (١)، مثال (٢) ص٣٩ بهدف إيجاد نهايات تؤدى إلى قوى العدد (هـ).

٢) $\therefore هـ = \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(١ + \frac{١}{س}\right)^{س}$ (١)

بفرض $م = \frac{١}{س}$ حيث $س \neq ٠$ فإن $م \to ٠$ عندما $س \to \infty$

$\therefore \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(١ + \frac{١}{س}\right)^{س} = \underset{م \to ٠}{\text{نهـا}} (١ + م)^{\frac{١}{م}}$

أى إن يمكن التعبير عن العدد هـ بالصورة: $هـ = \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} (١ + س)^{\frac{١}{س}}$

**نهايات تؤدى إلى قوى العدد هـ**

**مثال**

١ أوجد:

أ) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(١ + \frac{١}{س}\right)^{٣س}$ ب) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(١ + \frac{١}{س}\right)^{س + ٣}$

**الحل**

أ) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(١ + \frac{١}{س}\right)^{٣س} = \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left[\left(١ + \frac{١}{س}\right)^{س}\right]^{٣} = \left[\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(١ + \frac{١}{س}\right)^{س}\right]^{٣} = هـ^{٣}$

ب) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(١ + \frac{١}{س}\right)^{س + ٣} = \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(١ + \frac{١}{س}\right)^{س} \left(١ + \frac{١}{س}\right)^{٣}$

$= \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(١ + \frac{١}{س}\right)^{س} \times \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(١ + \frac{١}{س}\right)^{٣} = هـ \times (١ + ٠)^{٣} = هـ$

**حاول أن تحل**

١ أوجد:

أ) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(١ + \frac{١}{س}\right)^{\frac{١}{٥}س}$ ب) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(١ + \frac{١}{س}\right)^{٢س + ٥}$

٢ أوجد:

أ) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(١ + \frac{٥}{س}\right)^{س}$ ب) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{س + ٢}{س - ١}\right)^{س + ٤}$

**الحل**

أ) بفرض $ص = \frac{٥}{س}$ حيث $س \neq ٠$ فإن $ص \to ٠$ عندما $س \to \infty$

$\therefore \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(١ + \frac{٥}{س}\right)^{س} = \underset{ص \to ٠}{\text{نهـا}} (١ + ص)^{\frac{٥}{ص}} = \left(\underset{ص \to ٠}{\text{نهـا}} (١ + ص)^{\frac{١}{ص}}\right)^{٥} = هـ^{٥}$

ب) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{س + ٢}{س - ١}\right)^{س + ٤} = \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{س - ١ + ٣}{س - ١}\right)^{س + ٤} = \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(١ + \frac{٣}{س - ١}\right)^{س + ٤}$

$= \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(١ + \frac{٣}{س - ١}\right)^{س - ١} \times \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(١ + \frac{٣}{س - ١}\right)^{٥} = هـ^{٣} \times (١)^{٥} = هـ^{٣}$



## التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

ناقش مع طلابك ما ورد فى بند حاول أن تحل (١) ، (٢) ص٣٩، ص(٤٠) وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة.

## حلول:



أ) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(١ + \frac{١}{س}\right)^{\frac{١}{٥}س} = \left[\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(١ + \frac{١}{س}\right)^{س}\right]^{\frac{١}{٥}} = هـ^{\frac{١}{٥}}$

ب) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(١ + \frac{١}{س}\right)^{٢س + ٥} = \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left[\left(١ + \frac{١}{س}\right)^{٢س} \times \left(١ + \frac{١}{س}\right)^{٥}\right]$

$= \left[\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(١ + \frac{١}{س}\right)^{س}\right]^{٢} \times \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(١ + \frac{١}{س}\right)^{٥} = هـ^{٢}$



أ) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(١ + \frac{٣}{س}\right)^{س}$ بوضع $\frac{٣}{س} = ص$

$\therefore س \to \infty$ $\therefore ص = \text{صفر}$

$\therefore \underset{ص \to ٠}{\text{نهـا}} (١ + ص)^{\frac{٣}{ص}} = \left(\underset{ص \to ٠}{\text{نهـا}} (١ + ص)^{\frac{١}{ص}}\right)^{٣} = هـ^{٣}$

ب) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(١ + \frac{١}{س}\right)^{٢س}$ بوضع $\frac{-١}{س} = ص$

عندما $س \leftarrow ص$ فإن $ص = ٠$

$= \underset{ص \to ٠}{\text{نهـا}} (١ + ص)^{\frac{-٢}{ص}} = \left(\underset{ص \to ٠}{\text{نهـا}} (١ + ص)^{\frac{١}{ص}}\right)^{-٢} = هـ^{-٢}$

ج) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{س}{س + ١}\right)^{س} = \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{س + ١}{س}\right)^{-س}$

$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(١ + \frac{١}{س}\right)^{-س} = \left(\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(١ + \frac{١}{س}\right)^{س}\right)^{-١} = هـ^{-١}$

د) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{٢س + ٥}{٢س + ١}\right)^{س + ٢}$ بقسمة البسط على المقام

$\therefore \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{١}{٢س + ١}\right)^{س + ٢} = \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(١ + \frac{٤}{٢س + ١}\right)^{س + ٢}$

يوضع $٢س + ١ = ص$

$\therefore س = \frac{١}{٢} ص - \frac{١}{٢}$

$= \underset{ص \to \infty}{\text{نهـا}} \left(١ + \frac{٤}{ص}\right)^{\frac{١}{٢}ص + \frac{٣}{٢}}$

$= \underset{ص \to \infty}{\text{نهـا}} \left(١ + \frac{٤}{ص}\right)^{\frac{١}{٢}ص} \times \left(١ + \frac{٤}{ص}\right)^{\frac{٣}{٢}}$

$= (هـ^{٤})^{\frac{١}{٢}} = هـ^{٢}$

### معلومة إثرائية للمعلم:

**متسلسلة تايلور المنتهية**

باعتبار أن الدالة د(س) قابلة للاشتقاق ن من المرات فى النقطة ت فإنه يمكن كتابتها كما يلى:

$د(س) = ت_{ن}(س) + ع_{ن}(س)$

حيث $ت_{ن}(س)$ تسمى متسلسلة تايلور وتساوى

$$ت_{ن}(س) = \sum_{ك = ٠}^{ن} \frac{د^{ك}(س.)}{\underline{|ك}} (س - س.)^{ك}$$

ويمكن اعتبار كثيرة الحدود $ت_{ن}(س)$ تقريبًا للدالة فى النقطة س.

**متسلسلة تايلور الغير منتهية**

$$ت_{ن}(س) = \sum_{ك = ٠}^{\infty} \frac{د^{ن}(س.)}{\underline{|ك}} (س - س.)^{ك}$$

وتستخدم متسلسلة تايلور للتعبير عن أى دالة كثيرة الحدود وذلك بإيجاد حلول تقريبية للمسائل إذا كان الحل الدقيق مستعصيًا.

فى بند تعلم: أكد إلى الطلاب على تعريف الدالة الأسية التى أساسها هـ، كذلك الدالة اللوغاريتمية وأكد على خواص كل منهما وتماثلها حول المستقيم ص = س

## التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

### حلول

**٣**

**أ** لو$_{هـ}$ (س + ٣) + لو$_{هـ}$ $\frac{س}{٤}$ = ٠   ∴ لو$_{هـ}$ (س + ٣) $\frac{س}{٤}$ = ٠

∴ (س + ٣) ($\frac{س}{٤}$) = ١   بالضرب فى ٤

س$^{٢}$ + ٣س - ٤ = ٠   ∴ (س + ٤) (س - ١) = ٠

س = ١ ، س = -٤ مرفوض

∴ م . ح = {١}

**ب** ٣ هـ$^{س^{٢}}$ = ١٢٠٠   هـ$^{س^{٢}}$ = ٤٠٠

لو$_{هـ}$ ٤٠٠ = س$^{٢}$   ∴ س ≃ ٢,٤٤٥

### ٣ حاول أن تحل

$\underset{س \to \infty}{نهـا}$ ن [ لو$_{هـ}$ (ن + ١) - لو$_{هـ}$ ن]

= $\underset{س \to \infty}{نهـا}$ ن لو$_{هـ}$ ($\frac{ن + ١}{ن}$) = $\underset{ن \to \infty}{نهـا}$ لو$_{هـ}$ (١ + $\frac{١}{ن}$)$^{ن}$

= لو$_{هـ}$ $\underset{س \to \infty}{نهـا}$ (١ + $\frac{١}{ن}$)$^{ن}$ = لو$_{هـ}$ هـ = ١



**حاول أن تحل**

**٢** أوجد:

**أ** $\underset{س \to \infty}{نهـا}$ (١ + $\frac{٣}{س}$)$^{س}$   **ب** $\underset{س \to \infty}{نهـا}$ (١ - $\frac{١}{س}$)$^{٢س}$

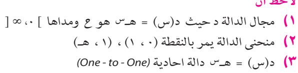
**جـ** $\underset{س \to \infty}{نهـا}$ ($\frac{س}{س + ١}$)$^{س}$   **د** $\underset{س \to \infty}{نهـا}$ ($\frac{٢س + ٥}{٢س + ١}$)$^{س + ٢}$

**لاحظ:** يمكن التعبير عن العدد هـ بالمتسلسلة هـ = $\sum_{ن=٠}^{\infty}$ $\frac{١}{\lfloor ن}$ (متسلسلة تايلور)

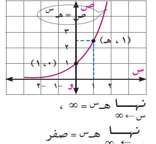
حيث هـ = ١ + $\frac{١}{\lfloor ١}$ + $\frac{١}{\lfloor ٢}$ + $\frac{١}{\lfloor ٣}$ + ...... ∞

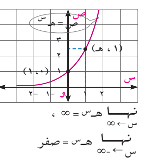
#### تعلم

**دالة الأساس الطبيعى** *Natural Exponential Function*



هى دالة أسية أساسها هـ ، د(س) = هـ$^{س}$ ، س ∈ ع







$\underset{س \to \infty}{نهـا}$ هـ$^{س}$ = ∞ ،

$\underset{س \to -\infty}{نهـا}$ هـ$^{س}$ = صفر

**لاحظ أن**

١) مجال الدالة د حيث د(س) = هـ$^{س}$ هو ع ومداها ]٠، ∞[
٢) منحنى الدالة يمر بالنقطة (٠ ، ١) ، (١ ، هـ)
٣) د(س) = هـ$^{س}$ دالة احادية *(One - to - One)*
تقبل وجود دالة عكسية تعرف بدالة اللوغاريتم الطبيعى
٤) نستخدم الرمز *exp (x)* عند رسم الدالة باستخدام أى برنامج رسومى

**دالة اللوغاريتم الطبيعى** *Natural Logarithm Function*

هى لوغاريتمية أساسها هـ ، د(س) = لو$_{هـ}$ س ، س ∈ ع$^{+}$

**لاحظ أن:**

١) مجال الدالة د حيث د(س) = لو$_{هـ}$ س هو ع$^{+}$ ومداها ع
٢) منحنى الدالة يمر بالنقط (١ ، ٠) ، (هـ ، ١)
٣) هى دالة عكسية للدالة ص = هـ$^{س}$
٤) يستخدم الرمز *ln(x)* لرسم الدالة باستخدام أى برنامج رسومى للحاسب الآلى.
٥) لإيجاد قيمة لو$_{هـ}$ ١٠ مثلًا اضغط على المفاتيح التالية:
ابدأ → ln 1 0 =
نجد أن لو$_{هـ}$ ١٠ = ٢,٣٠٢٥٨٥٠٩٣ لأقرب ٩ أرقام عشرية.

$\underset{س \to \infty}{نهـا}$ لو$_{هـ}$ س = ∞ ،

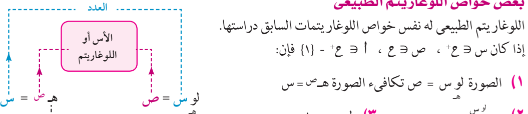
$\underset{س \to ٠}{نهـا}$ لو$_{هـ}$ س = -∞





**بعض خواص اللوغاريتم الطبيعى**

اللوغاريتم الطبيعى له نفس خواص اللوغاريتمات السابق دراستها.
إذا كان س ∈ ع$^{+}$ ، ص ∈ ع ، أ ∈ ع$^{+}$ - {١} فإن:





١) الصورة لو$_{هـ}$ س = ص تكافىء الصورة هـ$^{ص}$ = س
٢) هـ$^{لو_{هـ} س}$ = س   ٣) لو$_{هـ}$ هـ = ١
٤) لو$_{هـ}$ ١ = صفر   ٥) لو$_{أ}$ س = $\frac{لو_{هـ} س}{لو_{هـ} أ}$ (خاصية تغير الأساس)

لكل س ، ص ، أ ∈ ع$^{+}$ ، أ ≠ ١ ، ن ∈ ع

٦) لو$_{هـ}$ س ص = لو$_{هـ}$ س + لو$_{هـ}$ ص   ٧) لو$_{هـ}$ $\frac{س}{ص}$ = لو$_{هـ}$ س - لو$_{هـ}$ ص
٨) لو$_{هـ}$ س$^{ن}$ = ن لو$_{هـ}$ س   ٩) لو$_{هـ}$ س × لو$_{س}$ هـ = ١

**المعادلات الأسية واللوغاريتمية**

**مثال**

**٣** حل المعادلة:

**أ** س - س هـ$^{٢س-٣}$ = ٠   **ب** لو$_{هـ}$ (س + ١) - لو$_{هـ}$ (س - ٢) = لو$_{هـ}$ ٤

**الحل**

**أ** ∵ س - س هـ$^{٢س-٣}$ = ٠   ∴ س (١ - هـ$^{٢س-٣}$) = ٠
أما س = ٠ أو هـ$^{٢س-٣}$ = ١
∴ هـ$^{٢س-٣}$ = هـ$^{٠}$   أى س = $\frac{٣}{٢}$   ∴ مجموعة حل المعادلة = {٠ ، $\frac{٣}{٢}$}

**ب** ∵ لو$_{هـ}$ (س + ١) - لو$_{هـ}$ (س - ٢) = لو$_{هـ}$ ٤
∴ لو$_{هـ}$ $\frac{س + ١}{س - ٢}$ = لو$_{هـ}$ ٤
ويكون: $\frac{س + ١}{س - ٢}$ = ٤
٤س - ٨ = س + ١   أى س = ٣   ∴ مجموعة حل المعادلة = {٣}

**حاول أن تحل**

**٣** أوجد مجموعة حل المعادلة:

**أ** لو$_{هـ}$ (س + ٣) + لو$_{هـ}$ $\frac{س}{٤}$ = ٠   **ب** ٣ هـ$^{س^{٢}}$ = ١٢٠٠

## التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

ناقش مع طلابك ما ورد فى بند حاول أن تحل أ، (٤٣) وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة.

⑤ ٣٢,٢٧ × ١٠$^{٦}$ = ٢٣,٢ × هـ$^{٦ر}$ × ١٠$^{٦}$

هـ$^{٦ر}$ = $\frac{٣٢٢٧}{٢٣٢٠}$

لو$_{هـ}$ $\frac{٣٢٢٧}{٢٣٢٠}$ = ٦ر

لو$_{هـ}$ ١,٣٩ = ٦ر

المعدل ر ≃ ٠,٠٥٥ = $\frac{٥٥}{١٠٠٠}$ × ١٠٠ = ٥,٥ ٪

⑥ معدل النمو السنوى

ن = ٢٠١٥ - ٢٠٠٧ = ٨ سنوات

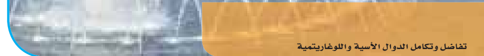
∴ أ = ٣٢٠ × ١٠$^{٦}$ جنيهًا

∴ ص = أ هـ$^{رن}$

∴ ٦٨٠ × ١٠$^{٦}$ = ٣٢٠ × ١٠$^{٦}$ × هـ$^{٨ر}$

هـ$^{٨ر}$ = $\frac{١٧}{٨}$ ∴ لو$_{هـ}$ $\frac{١٧}{٨}$ = ٨ر

∴ ٨ر ≃ ٠,٧٥٣٧٧٢ ∴ ر ≃ ٠,٠٩ = ٩٪




**لاحظ**

يمكن استخدام اللوغاريتمات الطبيعية لإجراء الحسابات العديدة بنفس طريقة استخدام اللوغاريتمات العادية، إلا أن ذلك يتطلب جهدًا أكبر بكثير، خاصة أن لو$_{هـ}$ ١٠ ≃ ٢,٣٠٢٦ لذلك يفضل استخدامه فيما يتعلق بالنهايات والاشتقاق وحل المعادلات الأسية واللوغاريتمية للأساس هـ

**النهايات واللوغاريتم الطبيعى**

**مثال**

④ أثبت أن نهـا$_{س ← ٠}$ $\frac{أ^{س} - ١}{س}$ = لو$_{هـ}$ أ

**الحل**

نفرض: ص = أ$^{س}$ - ١ ، عند س ← ٠ فإن ص ← ٠ (١)

فيكون أ$^{س}$ = ١ + ص بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

∴ لو$_{هـ}$ أ$^{س}$ = لو$_{هـ}$ (١ + ص) وباستخدام خاصية لوغاريتم القوة

∴ س لو$_{هـ}$ أ = لو$_{هـ}$ (١ + ص) أى أن: س = $\frac{لو_{هـ} (١ + ص)}{لو_{هـ} أ}$ (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن:

نهـا$_{س ← ٠}$ $\frac{أ^{س} - ١}{س}$ = نهـا$_{ص ← ٠}$ $\frac{ص}{لو_{هـ} (١ + ص)}$ × لو$_{هـ}$ أ = نهـا$_{ص ← ٠}$ $\frac{لو_{هـ} أ}{\frac{١}{ص} لو_{هـ} (١ + ص)}$

= نهـا$_{ص ← ٠}$ $\frac{لو_{هـ} أ}{لو_{هـ} (١ + ص)^{\frac{١}{ص}}}$ = $\frac{لو_{هـ} أ}{نهـا_{ص ← ٠} لو_{هـ} (١ + ص)^{\frac{١}{ص}}}$

= $\frac{لو_{هـ} أ}{لو_{هـ} نهـا_{ص ← ٠} (١ + ص)^{\frac{١}{ص}}}$ = $\frac{لو_{هـ} أ}{لو_{هـ} هـ}$ = لو$_{هـ}$ أ

**حاول أن تحل**

④ أثبت أن: نهـا$_{ن ← ∞}$ ن [لو$_{هـ}$(ن + ١) - لو$_{هـ}$ ن] = ١

**تطبيقات اللوغاريتمات الطبيعية**

⑤ بعد الحقن يُعطى تركيز عقار معين فى دم المريض بالعلاقة د(ن) = ٥ هـ$^{-٠,٦ن}$ مجم/سم$^{٣}$، حيث ن الزمن مقيسًا بالساعات. وتُعطى الحقنة التالية حين يهبط د(ن) إلى ٠,٠٥ مجم/سم$^{٣}$ احسب بعد كم من الساعات يجب إعطاء هذه الحقنة.

كتاب الرياضيات البحتة - التفاضل والتكامل ٤٢

دالة الأساس الطبيعى واللوغاريتم الطبيعى ٢ - ١

**الحل**

تعطى الحقنة الثانية للمريض عندما: ٠,٠٥ = ٥ هـ$^{-٠,٦ن}$ أى $\frac{١}{١٠٠}$ = هـ$^{-٠,٦ن}$

بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ لو$_{هـ}$ ١ - لو$_{هـ}$ ١٠٠ = -٠,٦ن أى ن = لو$_{هـ}$ ١٠٠ ÷ ٠,٦

بضغط مفاتيح حاسبة الجيب ابدأ ← In 1 0 0 ) ÷ 0 . 6 =

نجد أن: ن ≃ ٧,٦٧٥ ساعة

**حاول أن تحل**

⑤ إذا كانت مبيعات إحدى الشركات بملايين الجنيهات تتحدد بالعلاقة د(ن) = ٢٣,٢ هـ$^{رن}$، حيث ن الزمن مقاسًا بالسنوات، ر المعدل الثابت المستهدف لزيادة المبيعات. إذا حققت الشركة مبيعات قدرها ٣٢,٢٧ مليون جنيه بعد ٦ سنوات، احسب هذا المعدل بالنسبة مئوية.

**تقدير معدلات النمو** *Estimating Growth Rates*

⑥ النمذجة الرياضية: بلغ تعداد سكان مصر عام ١٩٩٦ حوالى ٦١,٤٥٢ مليون نسمة ، ٧٦,٥ مليون عام ٢٠٠٦ احسب معدل نمو السكان السنوى (بفرض ثباته) ، ثم قدر عدد سكان مصر عام ٢٠٢٠.

**الحل**

نمذجة المشكلة: يمكن قياس معدل النمو من خلال دالة الأساس الطبيعى ص = أهـ$^{رن}$

باستخدام البيانات المعطاه حيث:

ر معدل النمو السنوى، ن عدد السنوات

أ عدد السكان سنة الأساس (عند ن = ٠) ، ص عدد السكان بعد زمن ن

باعتبار سنة الأساس ١٩٩٦ (عند ن = ٠) فإن ص = ٦١,٤٥٢ = أهـ$^{ر×٠}$ ∴ أ = ٦١,٤٥٢

فى عام ٢٠٠٦ (ن = ٢٠٠٦ - ١٩٩٦ = ١٠) فإن ص = ٧٦,٥

∴ ٧٦,٥ = ٦١,٤٥٢ هـ$^{١٠ر}$ بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

لو$_{هـ}$ ٧٦,٥ = لو$_{هـ}$ ٦١,٤٥٢ + ١٠ر ∴ ر = $\frac{١}{١٠}$ {لو ٧٦,٥ - لو ٦١,٤٥٢} ≃ ٠,٠٢١٩

أى إن معدل نمو السكان السنوى = $\frac{٠,٠٢١٩ × ١٠٠}{١٠٠}$ = ٢,١٩ ٪

وتكون دالة الأساس الطبيعى لنمو السكان هى: ص = ٦١,٤٥٢ هـ$^{٠,٠٢١٩ن}$

لتقدير عدد السكان عام ٢٠٢٠ فإن ن = ٢٠٢٠ - ١٩٩٦ = ٢٤

ص = ٦١,٤٥٢ هـ$^{(٠,٠٢١٩ × ٢٤)}$ ≃ ١٠٣,٩٤٤

أى إن العدد المقدر لسكان مصر عام ٢٠٢٠ يقترب من ١٠٣,٩٤٤ مليون نسمة.

**حاول أن تحل**

⑥ زاد الإيراد الكلى لشركة من ٣٢٠ مليون جنيه عام ٢٠٠٧ إلى ٦٨٠ مليون جنيه عام ٢٠١٥، أوجد المعدل السنوى الثابت لنمو الإيراد مستخدمًا دالة الأساس الطبيعى.

كتاب الطالب - الصف الثالث الثانوى ٤٣

## حلول تمارين (٢ - ١) ص (٤٤)

(١) د  (٢) أ

(٣) ب  (٤) د

(٥) $= \lim_{\text{س} \to \infty} [(1 + \frac{1}{\text{س}})^{\text{س}} \times (1 + \frac{1}{\text{س}})]$

$= \text{هـ} \times 1 = \text{هـ}$

(٦) $\lim_{\text{ص} \to \infty} (1 + \frac{1}{\text{ص}})^{\text{ص}-1} = \lim_{\text{ص} \to \infty} [(1 + \frac{1}{\text{ص}})^{\text{ص}} \div (1 + \frac{1}{\text{ص}})]$

$= \text{هـ} \div 1 = \text{هـ}$

(٨) $\lim_{\text{س} \to \infty} \left(\frac{\text{س}+7}{\text{س}+3}\right)^{\text{س}+4} = \lim_{\text{ص} \to \infty} \left(1 + \frac{4}{\text{س}+3}\right)^{\text{س}+4}$

يوضح ص = س + ٣

$\lim_{\text{ص} \to \text{س}} (1 + \frac{4}{\text{ص}})^{\text{ص}+1} = \lim_{\text{ص} \to \infty} [(1 + \frac{4}{\text{ص}})^{\text{ص}} \times [1 + \frac{4}{\text{ص}}]]$

$= \text{هـ}^{4} \times 1 = \text{هـ}^{4}$

(١١) الطرف الأيسر $= \frac{1}{2} [\,\text{لو}_{\text{هـ}}\, \text{س} (\text{س}^{2} + 1)\,]$

$= \text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س} (\text{س}^{2} + 1))^{\frac{1}{2}} = \text{لو}_{\text{هـ}} \sqrt{\text{س} (\text{س}^{2} + 1)}$

(١٢) $\because 3\text{هـ}^{\text{س}} = 16 \qquad \therefore \text{هـ}^{\text{س}} = \frac{16}{3}$

$\text{لو}_{\text{هـ}} \frac{16}{3} = \text{س} \qquad \therefore \text{س} \simeq 1{,}674$

(١٣) $2\text{هـ}^{\text{س}} + 2\,\text{هـ}^{-\text{س}} = 5 \times \text{هـ}^{\text{س}}$

$2\,\text{هـ}^{2\text{س}} - 5\,\text{هـ}^{\text{س}} + 2 = 0$

$(2\,\text{هـ}^{\text{س}} - 1)\,(\text{هـ}^{\text{س}} - 2) = 0$

$\text{هـ}^{\text{س}} = \frac{1}{2} \qquad \text{س} = \text{لو}_{\text{هـ}} \frac{1}{2}$

$\text{هـ}^{\text{س}} = 2 \qquad \text{س} = \text{لو}_{\text{هـ}} 2$

$\text{م.ح} = \{\text{لو}_{\text{هـ}} \frac{1}{2} \text{ ، } \text{لو}_{\text{هـ}} 2\}$

(١٤) $\text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س}^{2} - \text{س} - 6) = \text{لو}_{\text{هـ}} 6$

$\therefore \text{س}^{2} - \text{س} - 12 = \text{صفر}$

$(\text{س} - 4)\,(\text{س} + 3) = 0 \qquad \therefore \text{س} = 4$

$\text{م.ح} = \{4\}$

(١٥) $\text{لو}_{\text{هـ}} (2\text{ص}^{2} + 5\text{ص}) = \text{لو}_{\text{هـ}} 7$

$2\text{ص}^{2} + 5\text{ص} - 7 = 0$

$(2\text{ص} + 7)\,(\text{ص} - 1) = 0$

$\therefore \text{ص} = 1 \qquad \text{م.ح} = \{1\}$

(١٦) $\text{لو}_{\text{هـ}} \frac{3\text{س} - 1}{\text{س} + 2} = \text{لو}_{\text{هـ}} 2$

$3\text{س} - 1 = 4 + 2\text{س} \qquad \therefore \text{س} = 5 \qquad \therefore \text{م.ح} = \{5\}$

(١٧) $\text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س} - 4) = \text{لو}_{\text{هـ}} \text{هـ} + \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} = \text{لو}_{\text{هـ}} \text{هـ س}$

$\text{س} - 4 = \text{هـ س} \qquad \therefore \text{س}\,(1 - \text{هـ}) = 4$

$\text{س} = \frac{4}{1 - \text{هـ}} \qquad \text{م.ح} = \{\frac{4}{1 - \text{هـ}}\}$

(١٨) $\text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س} - 3)^{2} = \text{لو}_{\text{هـ}} 4\,(\text{س} + 5)$

$\therefore \text{س}^{2} - 6\text{س} + 9 = 4\text{س} + 20$

$\text{س}^{2} - 10\text{س} - 11 = \text{صفر}$

$(\text{س} - 11)\,(\text{س} + 1) = 0$

$\text{م.ح} = \{11\}$

(١٩) $\text{لو}_{\text{هـ}} \frac{\text{س}}{\text{س} - 1} = \text{لو}_{\text{هـ}} 5 \qquad \therefore \text{س} = 5\text{س} - 5$

$\text{س} = \frac{5}{4} \qquad \text{م.ح} \{\frac{5}{4}\}$

---

٢ - ١

### تمارين ٢ - ١

**اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:**

(١) $\lim_{\text{س} \to \infty} (1 + \frac{1}{\text{س}})^{2\text{س}}$ يساوى

أ) ١  ب) ٢  ج) هـ  د) $\text{هـ}^{2}$

(٢) إذا كان $\text{هـ}^{\text{س}+1} = 9$ فإن س لأقرب ٣ أرقام عشرية يساوى:

أ) ١,١٩٧  ب) ١,٩٢٢  ج) ٢,١٩٧  د) ٢,٧١٣

(٣) إذا كان $\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س} + 2) = \text{لو}_{\text{هـ}} 3$ فإن س تنتمى إلى المجموعة:

أ) {٣}  ب) {١}  ج) {١ ، ٣}  د) {١ ، ٢}

(٤) إذا كان $\text{م} = \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}} 5}$ فإن م يساوى

أ) ١  ب) $\frac{1}{\text{هـ}}$  ج) هـ  د) ٥

**أوجد:**

(٥) $\lim_{\text{س} \to \infty} (1 + \frac{1}{\text{س}})^{\text{س}+1}$  (٦) $\lim_{\text{س} \to \infty} (1 + \frac{1}{\text{س}+1})^{\text{س}}$  (٧) $\lim_{\text{م} \to \infty} (1 + \frac{1}{\text{م}})^{\text{م س}}$

(٨) $\lim_{\text{س} \to \infty} \left(\frac{\text{س}+7}{\text{س}+3}\right)^{\text{س}+4}$  (٩) $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{لو}_{\text{هـ}} (1 + 2\text{س})}{\text{س}}$  (١٠) $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{لو}_{\text{هـ}} (1 + \text{س}^{2})}{\text{س}^{2}}$

(١١) أثبت أن: $\text{لو}_{\text{هـ}} \sqrt{\text{س} (\text{س}^{2} + 1)} = \frac{1}{2} [\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س}^{2} + 1)]$

**حل المعادلة:**

(١٢) $3\,\text{هـ}^{\text{س}} = 16$  (١٣) $2\,\text{هـ}^{\text{س}} + 2\,\text{هـ}^{-\text{س}} = 5$

(١٤) $\text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س} - 3) + \text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س} + 2) = \text{لو}_{\text{هـ}} 6$  (١٥) $\text{لو}_{\text{هـ}} \text{ص} + \text{لو}_{\text{هـ}} (2\text{ص} + 5) = \text{لو}_{\text{هـ}} 7$

(١٦) $\text{لو}_{\text{هـ}} (3\text{س} - 1) - \text{لو}_{\text{هـ}} (2 + \text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}} 2$  (١٧) $\text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س} - 4) = 1 + \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}$

(١٨) $2\,\text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س} - 3) = \text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س} + 5) + \text{لو}_{\text{هـ}} 4$  (١٩) $\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} - \text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س} - 1) = \frac{1}{2} \text{لو}_{\text{هـ}} 25$

(٢٠) الربط بالكيمياء: تتحلل مادة مع مرور الزمن بصورة أسية حسب المعادلة $\text{ص} = 50\,\text{هـ}^{-0{,}231\,\text{ن}}$ حيث ص كمية المادة بالجرام بعد ن سنة، حدد المدة التى يتحلل فيها نصف كمية المادة (مدة نصف العمر).

(٢١) الشبكة الدولية للمعلومات: يتزايد عدد مستخدمى الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت) مقدرًا بالمليون بدولة ما بالعلاقة $\text{د(ن)} = 2\text{هـ}^{0{,}24\,\text{ن}}$ حيث ن تمثل الزمن بالسنوات منذ عام ٢٠١٠.

أ) احسب فى أى عام كان عدد مستخدمى الإنترنت ٤,١ مليون مستخدم.

ب) كم تتوقع أن يكون عدد مستخدمى الإنترنت عام ٢٠٢٠.

٤٤  كتاب الرياضيات البحتة - التفاضل والتكامل

# ٢ - ٢

## مشتقات الدوال الأسية واللوغاريتمية

**Derivatives of Exponential and Logarithmic**



٢ - ٢

# مشتقات الدوال الأسية واللوغارتمية

**Derivatives of Exponential and Logarithmic Functions**

**سوف تتعلم**
- مشتقات الدوال الأسية.
- مشتقات الدوال اللوغارتمية.
- التفاضل اللوغاريتمى.
- المشتقات العليا للدوال الأسية واللوغارتمية.
- نمذجة المشكلات.

**المصطلحات الأساسية**
- مشتقة Derivative
- قاعدة السلسلة Chain Rule
- المشتقة الأولى First Derivative
- الاشتقاق اللوغاريتمى Logarithmic Differentiation

**الأدوات المستخدمة**
- آلة حاسبة علمية

### استكشف

باستخدام الآلة الحاسبة أكمل الجدول التالى واستكشف $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \frac{\text{هـ}^{\text{س}} - 1}{\text{س}}$

| س | ٠,٠٠١ | ٠,٠٠٠١ | ٠,٠٠٠٠١ | ٠ | -٠,٠٠٠٠١ | -٠,٠٠٠١ | -٠,٠٠١ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\text{هـ}^{\text{س}} - 1}{\text{س}}$ | | | | | | | ٠,٩٩٩٥٠٠ |

راجع مثال (٤) فى الدرس السابق وتحقق من صحة اكتشافك.

### تعلم

**مشتقة دالة الأساس الطبيعى** *Derivative of Natural Exponential Function*

إذا كانت د(س) = هـ^س فإن د/(س) = هـ^س

من تعريف المشتقة

$$\text{د}'(\text{س}) = \lim_{\text{و} \to 0} \frac{\text{د}(\text{س} + \text{و}) - \text{د}(\text{س})}{\text{و}}$$

$$\therefore \text{د}'(\text{س}) = \lim_{\text{و} \to 0} \frac{\text{هـ}^{\text{س}+\text{و}} - \text{هـ}^{\text{س}}}{\text{و}} = \lim_{\text{و} \to 0} \frac{\text{هـ}^{\text{س}}(\text{هـ}^{\text{و}} - 1)}{\text{و}}$$

$$= \text{هـ}^{\text{س}} \times \lim_{\text{و} \to 0} \left(\frac{\text{هـ}^{\text{و}} - 1}{\text{و}}\right) = \text{هـ}^{\text{س}} \times 1 = \text{هـ}^{\text{س}}$$

أى أن $\frac{d}{d\text{س}}(\text{هـ}^{\text{س}}) = \text{هـ}^{\text{س}}$

**مشتقة دالة الأساس الطبيعى**

**مثال**

١ أوجد المشتقة الأولى لكل من:

أ ص = س^٢ + ٣هـ^س  ب ص = س^٣ هـ^س  ج ص = $\frac{٢\,\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س} + 1}$

**الحل**

أ ∵ ص = س^٢ + ٣ هـ^س ∴ $\frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = ٢\text{س} + ٣\frac{d}{d\text{س}}(\text{هـ}^{\text{س}}) = ٢\text{س} + ٣\,\text{هـ}^{\text{س}}$

ب ∵ ص = س^٣ هـ^س ∴ $\frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = \text{س}^٣ \frac{d}{d\text{س}}(\text{هـ}^{\text{س}}) + \text{هـ}^{\text{س}} \frac{d}{d\text{س}}(\text{س}^٣)$

$= \text{س}^٣\,\text{هـ}^{\text{س}} + ٣\,\text{س}^٢\,\text{هـ}^{\text{س}} = \text{س}^٢\,\text{هـ}^{\text{س}}(\text{س} + ٣)$

كتاب الطالب - الصف الثالث الثانوى

٤٥

### خلفية:

يتناول هذا الدرس مشتقة دالة الأساس الطبيعي (هـ^س) ومشتقة الدالة الأسية للأساس ا ، كذلك مشتقة دالة اللوغاريتم الطبيعي ومشتقة الدالة اللوغاريتمية للأساس (ا) مع إعطاء بعض التطبيقات الهندسية والحياتية، ويلزم الطالب بقواعد الأشتقاق السابق ذكرها وأهمها قاعدة السلسلة.

### مخرجات تعلم الدرس

**فى نهاية هذا الدرس وتنفيذ الأنشطة فيه من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:**

- يوجد مشتقات الدوال الأسية.
- يوجد مشتقات الدوال اللوغاريتمية
- يوجد المشتقات العليا للدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية.
- يحل تطبيقات حياتية تتناول مشتقات الدوال الأسية واللوغاريتمية.

### مفردات أساسية:

- مشتقة، اشتقاق، أس
- أشتقاق لوغاريتمى – قاعدة سلسلة

### المواد التعليمية المستخدمة:

السبورة التعليمية - طباشير ملون - آلة حاسبة علمية - برامج رسومية للحاسوب

### مكان التدريس:

الفصل الدراسى

### مصادر التعلم:

كتاب الطالب من ص(٤٥) إلى ص (٥٣)

### تهيئة

اطلب إلى الطلاب اكمال الجدول في ص٤٥ باستخدام الآلة الحاسبة لإيجاد علاقة بين س ، $\frac{\text{هـ}^{\text{س}} - 1}{\text{س}}$ وذلك للتوصل إلى مشتقة دالة الأساس الطبيعي وهي أن: $\frac{d}{d\text{س}}(\text{هـ}^{\text{س}}) = \text{هـ}^{\text{س}}$

### إجراءات الدرس:

**ناقش مع الطلاب مثال (١) ص (٤٥)**

**وهو يشمل الآتى**

- مشتقة مجموع دالتين
- مشتقة حاصل ضرب دالتين
- مشتقة قسمة دالتين
- حيث أن إحدى الدالتين هى الدالة هـ^س.

## التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

ناقش مع طلابك ما ورد فى بند حاول أن تحل ص(٤٦) ، ص(٤٧) وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة.

## حلول

### حاول أن تحل ①

أ) ص = ٢هـ$^{س}$ + جتا ٢س

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢هـ$^{س}$ - ٢ جا ٢س

ب) ص = هـ$^{س}$ جا س

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = هـ$^{س}$ جا س + هـ$^{س}$ جتا س

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = هـ$^{س}$ (جا س + جتا س)

ج) ∵ ص = $\frac{\text{هـ}^{س}}{\text{ظا س}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{هـ}^{س}\text{ (ظا س - هـ}^{س}\text{ قا}^{٢}\text{س)}}{\text{ظا}^{٢}\text{س}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{هـ}^{س}\text{ ظا س - قا}^{٢}\text{س}}{\text{ظا}^{٢}\text{س}}$

### حاول أن تحل ②

أ) ∵ ص = ٢س + هـ$^{٦س}$

∵ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢ + ٦هـ$^{٦س}$

ب) ص = $\frac{١}{٢}$ هـ$^{٧ - س^{٢}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{١}{٢}$ هـ$^{٧ - س^{٢}}$ × -٢س

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = - س هـ$^{٧ - س^{٢}}$

ج) ص = (هـ$^{٢س}$ + هـ$^{-٢س}$)$^{٣}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣ (هـ$^{٢س}$ + هـ$^{-٢س}$)$^{٢}$ (٢هـ$^{٢س}$ - ٢هـ$^{-٢س}$)

### حاول أن تحل ③

أ) ص = ٥$^{س^{٢} + ٢س}$

بوضع ع = س$^{٢}$ + ٢س

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}}$ × $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

= ٥$^{ع}$ لو$_{هـ}$ ٥ × (٢س + ٢)

= ٥$^{س^{٢} + ٢س}$ × لو$_{هـ}$ ٥ × (٢س + ٢)

ب) ص = ٢$^{\text{قا}^{٢}\text{س}}$



ج) ∵ ص = $\frac{٢\text{ هـ}^{س}}{\text{س} + ١}$ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{(س + ١)}\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\text{(٢هـ}^{س}\text{) - ٢هـ}^{س}\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\text{(س + ١)}}{\text{(س + ١)}^{٢}}$ = $\frac{\text{٢ س هـ}^{س}}{\text{(س + ١)}^{٢}}$

**حاول أن تحل**

① أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ لكل مما يأتى:

أ) ص = ٢هـ$^{س}$ + جتا ٢س ب) ص = هـ$^{س}$ جا س ج) ص = $\frac{\text{هـ}^{س}}{\text{طا س}}$

**تفكير ناقد:** ما العلاقة بين ميل المماس للمنحنى ص = هـ$^{س}$ عند أى نقطة عليه والإحداثى الصادى لهذه النقطة؟ فسر إجابتك

**لاحظ أن** إذا كانت ع دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س ، د(س) = هـ$^{ع}$ **فإن:** $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (هـ$^{ع}$) = هـ$^{ع}$ • $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

**قاعدة السلسلة**

**مثال**

② أوجد المشتقة الأولى لكل من:

أ) ص = هـ$^{٣س^{٢} + ٥}$ ب) ص = ٣هـ$^{\text{قا س}}$ ج) ص = (هـ$^{٣س}$ - هـ$^{-٢س}$)$^{٥}$

**الحل**

أ) ∵ ص = هـ$^{٣س^{٢} + ٥}$ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = هـ$^{٣س^{٢} + ٥}$ × $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (٣س$^{٢}$ + ٥) = ٦س هـ$^{٣س^{٢} + ٥}$

ب) ∵ ص = ٣هـ$^{\text{قا س}}$ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣ هـ$^{\text{قا س}}$ × $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (قا س) = ٣ هـ$^{\text{قا س}}$ • قاس طا س

ج) ∵ ص = (هـ$^{٣س}$ - هـ$^{-٢س}$)$^{٥}$ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٥ (هـ$^{٣س}$ - هـ$^{-٢س}$)$^{٤}$ [٣هـ$^{٣س}$ + ٢هـ$^{-٢س}$]

**حاول أن تحل**

② أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ لكل مما يأتى:

أ) ص = ٢س + هـ$^{٦س}$ ب) ص = $\frac{١}{٢}$هـ$^{٧ - س^{٢}}$ ج) ص = (هـ$^{٢س}$ + هـ$^{-٢س}$)$^{٣}$

**تعلم**

**مشتقة الدالة الأسية للأساس ا** *Derivative of Exponential Function to the Base a*

**إذا كانت** د(س) = ا$^{س}$ **فإن** د$'$(س) = ا$^{س}$ لو$_{هـ}$ ا

ا = هـ$^{ص}$ ← ا = هـ$^{\text{لو}_{هـ}\text{ا}}$

لو$_{هـ}$ ا = ص لو$_{هـ}$ هـ

ص = لو$_{هـ}$ ا

**لاحظ أن** ا = هـ$^{\text{لو}_{هـ}\text{ا}}$ (من خواص اللوغاريتمات) ∴ ا$^{س}$ = [هـ$^{\text{لو}_{هـ}\text{ا}}$]$^{س}$ = هـ$^{\text{س لو}_{هـ}\text{ا}}$

**ويكون** $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (ا$^{س}$) = $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (هـ$^{\text{س لو}_{هـ}\text{ا}}$) = هـ$^{\text{س لو}_{هـ}\text{ا}}$ × لو$_{هـ}$ ا = ا$^{س}$ × لو$_{هـ}$ ا



$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢$^{\text{قا}^{٢}\text{س}}$ × لو$_{هـ}$ ٢ × ٢ قا س قا س ظا س

= ٢$^{\text{قا}^{٢}\text{س}}$ ظاس × لو$_{هـ}$ ٢ × ٢قا$^{٢}$س

ج) ص = هـ$^{٢س}$ ا$^{س^{٢} - ٥}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢هـ$^{٢س}$ × ا$^{س^{٢} - ٥}$ + هـ$^{٢س}$ × ا$^{س^{٢} - ٥}$ لو$_{هـ}$ ا × ٢س

= ٢هـ$^{٢س}$ × ا$^{س^{٢} - ٥}$ [١ + س لو$_{هـ}$ ا]

### تفكير ناقد: ص٤٦

يهدف هذا التفكير إلى أن مشتقة الدالة ص = هـ$^{س}$ عند أى نقطة هو نفسة قيمة الإحداثى الصادى لهذه النقطة.

### إجابة التفكير

ميل المماس للمنحنى ص = هـ$^{س}$ هو $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = هـ$^{س}$

**أى أن** $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ص

**مشتقه الدالة الأسية**

**مثال**

٣ أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ لكل مما يأتى:

أ) $\text{ص} = ٥ \times ٦^{\text{س}}$  ب) $\text{ص} = ٣^{(٣\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٢)}$  ج) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{جاس}} \times ٢^{-٥\text{س}}$

**الحل**

أ) $\because \text{ص} = ٥ \times ٦^{\text{س}}$  $\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٥ \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(٦^{\text{س}}) = ٥ \times ٦^{\text{س}} \text{لو}_{\text{هـ}} ٦$

ب) $\because \text{ص} = ٣^{٣\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٢}$  $\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = (٦\text{س} - ٥) \times ٣^{(٣\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٢)} \times \text{لو}_{\text{هـ}} ٣$

ج) $\because \text{ص} = \text{هـ}^{\text{جاس}} \times ٢^{-٥\text{س}}$  $\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{هـ}^{\text{جاس}} \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(٢^{-٥\text{س}}) + ٢^{(-٥\text{س})} \frac{\text{ء}}{\text{ءس}} \text{هـ}^{\text{جاس}}$

$= \text{هـ}^{\text{جاس}} [-٥ \times ٢^{-٥\text{س}} \text{لو}_{\text{هـ}} ٥] + ٢^{-٥\text{س}} [\text{هـ}^{\text{جاس}} \text{جتا س}]$

$= ٢^{-٥\text{س}} \text{هـ}^{\text{جاس}} [\text{لو}_{\text{هـ}} ٥^{-٥} + \text{جتا س}]$

**حاول أن تحل**

٣ أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ لكل مما يأتى:

أ) $\text{ص} = ٥^{\text{س}^٢ + ٢\text{س}}$  ب) $\text{ص} = ٢^{\text{قا}^٢\text{س}}$  ج) $\text{ص} = \text{هـ}^{٢\text{س}} \sqrt{\text{س}^٢ - ٥}$

**تعلم**

**مشتقة دالة اللوغاريتم الطبيعى** *Derivative of Natural Logarithm Function*

> إذا كانت $\text{د(س)} = \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}$ ، $\text{س} > ٠$ فإن $\text{د}'(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}}$

لاحظ أن الدالة اللوغاريتمية هى دالة عكسية للدالة الأسية

إذا كان $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}$ فإن $\text{س} = \text{هـ}^{\text{ص}}$ (١)

بتفاضل طرفى العلاقة (١) بالنسبة إلى س $\therefore ١ = \text{هـ}^{\text{ص}} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{\text{س}}$  أى أن: $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}) = \frac{١}{\text{س}}$

**مشتقة دالة اللوغاريتم الطبيعى**

**مثال**

٤ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى:

أ) $\text{ص} = ٣\text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}$  ب) $\text{ص} = (٢\text{س}^٥ - ٣) \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}$  ج) $\text{ص} = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} - ١}{\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} + ١}$

٤٧ كتاب الطالب – الصف الثالث الثانوى

## فى بند تعلم : ص ٤٧

أكد إلى الطلاب أن الدالة اللوغاريتمية هى الصورة العكسية للدالة الأسية.

إذا كانت $\text{د(س)} = \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}$ فإن $\text{س} > ٠$

## فى بند تفكير ناقد ص (٤٨)

يهدف هذا التفكير إلى إيجاد علاقة بين ميل المماس (مشتقة الدالة) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}} \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}$ عند أى نقطة والأحداثى السينى لنفس النقطة حيث يكون:

ميل المماس $(\frac{١}{\text{س}})$ = مقلوب الاحداثى السينى لنقطة التماس

**إجابة**

$\because \text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}$  $\therefore$ ميل المماس $= \frac{١}{\text{س}}$

مقلوب الاحداثى السينى لنقطة التماس

## التقييم المستمر (المتابعة والحوار):

ناقش مع طلابك ما ورد فى بند حاول أن تحل وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة.

## الحلول

### حاول أن تحل ٤

أ) $\text{ص} = ٥ - ٣ \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -٣ \times \frac{١}{\text{س}} = \frac{-٣}{\text{س}}$

ب) $\text{ص} = \text{س}^٢ \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{س} \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} + \text{س}^٢ \times \frac{١}{\text{س}}$

$= ٢\text{س} \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} + \text{س}$

ج) $\text{ص} = \frac{١ - ٢ \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}}{\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}} = (\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س})^{-١} - ٢$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -١ (\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س})^{-٢} \times \frac{١}{\text{س}}$

### حاول أن تحل ٥

أ) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}} (٧\text{س} - ٢)^٢$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{(٧\text{س} - ٢)^٢} \times ٢ (٧\text{س} - ٢) \times ٧ = \frac{١٤}{(٧\text{س} - ٢)}$

ب) $\text{ص} = ٢\text{س}^٢ \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}^٣$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٤\text{س} \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}^٣ + ٢\text{س}^٢ \times \frac{١}{\text{س}^٣} \times ٣\text{س}^٢$

$= ٤\text{س} \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}^٣ + ٦\text{س}$

ج) $\text{ص} = \frac{\text{س}}{\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} \times ١ - \text{س} \times \frac{١}{\text{س}}}{(\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س})^٢}$

$= \frac{\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} - ١}{(\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س})^٢}$

## التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

## الحلول

### حاول أن تحل ٦

أ) $\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}} = \frac{١}{٥\text{س}} \times \frac{٥}{\text{لو}_{\text{هـ}} ٢} = \frac{١}{\text{س لو}_{\text{هـ}} ٢}$

$\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}_{\text{س}=٢}} = \frac{١}{٢ \text{ لو}_{\text{هـ}} ٢} \simeq ٠,٧٢$

ب) $\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}} = \frac{٤}{(٣\text{س}+١)} \times \frac{١}{\text{لو}_{\text{هـ}} ١٠} \times ٣$

$\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}_{\text{س}=١}} = \frac{٤ \times ٣}{٤ \times \text{لو}_{\text{هـ}} ١٠} = \frac{٣}{\text{لو}_{\text{هـ}} ١٠} \simeq ١,٣$

ج) $\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}} = \frac{٤(٢\text{س}^٢-٣)^٣ \times ٤\text{س}}{(٢\text{س}^٢-٣)^٤} \times \frac{١}{\text{لو}_{\text{هـ}} ٢}$

$= \frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}_{\text{س}=١}} = \frac{١٦}{-١} \times \frac{١}{\text{لو}_{\text{هـ}} ٢} \simeq -٣,٠٨$

د) $\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}} = ٣ \times ٢ \text{ (لو س)} \times \frac{١}{\text{س}} \times \frac{١}{\text{لو}_{\text{هـ}} ١٠}$

$\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}} = \frac{٦ \text{ لو}_{\text{هـ}} \text{س}}{\text{س}} \times \frac{١}{\text{لو}_{\text{هـ}} ١٠}$

$\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}} = \frac{٦ \text{ لو}_{\text{هـ}} \text{س}}{٣} \times \frac{١}{\text{لو}_{\text{هـ}} ١٠} \simeq ٠,٤١٤$

### حاول أن تحل ٧

$\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}} = \frac{١}{٢\text{س}} \times ٢ = \frac{١}{\text{س}} \qquad \frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}_{\text{س}=١}} = ١$

∴ ميل العمودى هو -١

$(\text{ص} - \text{لو}_{\text{هـ}} ٢) = -١ (\text{س} - ١) \qquad \text{ص} = -\text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}} ٢ + ١$

احداثى ب $= (\text{لو}_{\text{هـ}} ٢ + ١ ، ٠)$

أ ب $= \sqrt{(\text{لو}_{\text{هـ}} ٢)^٢ + (\text{لو}_{\text{هـ}} ٢)^٢} = \text{لو}_{\text{هـ}} ٢ \times \sqrt{٢}$

---

تفاضل وتكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية

**الحل**

أ) $\because \text{ص} = ٣\text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} \qquad \therefore \frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}} = ٣ + \frac{\text{ى}}{\text{ى س}} (\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}) = ٣ + \frac{١}{\text{س}}$

ب) $\because \text{ص} = (٢\text{س}^٥ - ٣) \text{ لو}_{\text{هـ}} \text{س} \qquad \therefore \frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}} = (٢\text{س}^٥ - ٣) \frac{\text{ى}}{\text{ى س}} (\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}) + (\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}) \frac{\text{ى}}{\text{ى س}} (٢\text{س}^٥ - ٣)$

$= (٢\text{س}^٥ - ٣) \times \frac{١}{\text{س}} + ١٠\text{س}^٤ \text{ لو}_{\text{هـ}} \text{س}$

$= \frac{١}{\text{س}} [(٢\text{س}^٥ - ٣) + ١٠\text{س}^٥ \text{ لو}_{\text{هـ}} \text{س}]$

ج) $\because \text{ص} = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} - ١}{\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} + ١} \qquad \therefore \frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}} = \frac{(\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} + ١) \times \frac{١}{\text{س}} - (\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} - ١) \times \frac{١}{\text{س}}}{(\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} + ١)^٢} = \frac{٢}{\text{س} (\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} + ١)^٢}$

**حاول أن تحل**

٤) أوجد $\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}}$ لكل مما يأتى:

أ) $\text{ص} = ٥ - ٣ \text{ لو}_{\text{هـ}} \text{س}$ ب) $\text{ص} = \text{س}^٢ \text{ لو}_{\text{هـ}} \text{س}$ ج) $\text{ص} = \frac{١ - ٢ \text{ لو}_{\text{هـ}} \text{س}}{\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}}$

تفكير ناقد: ما العلاقة بين ميل المماس للمنحنى ص = $\text{لو}_{\text{هـ}}$ س عند أى نقطة عليه والإحداثى السينى لنقطة المماس؟ فسر إجابتك.

**لاحظ أن**

- إذا كانت ع دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س ، د(س) = $\text{لو}_{\text{هـ}}$ ع فإن: $\frac{\text{ى}}{\text{ى س}} [\text{لو}_{\text{هـ}} \text{ع}] = \frac{١}{\text{ع}} \cdot \frac{\text{ى ع}}{\text{ى س}}$
- إذا كانت س < ٠ فإن: $\frac{\text{ى}}{\text{ى س}} [\text{لو}_{\text{هـ}} (-\text{س})] = \frac{١}{-\text{س}} \times -١ = \frac{١}{\text{س}}$
- وبوجة عام $\frac{\text{ى}}{\text{ى س}} [\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}|] = \frac{١}{\text{س}}$ لكل س ≠ ٠

**قاعدة السلسلة**

**مثال**

٥) أوجد $\frac{\text{ى}}{\text{ى س}}$ لكل مما يأتى:

أ) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}} (٢\text{س}^٣ + ٩)$ ب) $\text{ص} = \text{س}^٤ \text{ لو}_{\text{هـ}} \text{س}^٣$ ج) $\text{لو}_{\text{هـ}} \frac{\text{س}^٢}{\text{س} + ٧}$

**الحل**

أ) $\because \text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}} (٢\text{س}^٣ + ٩) \qquad \therefore \frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}} = \frac{١}{٢\text{س}^٣ + ٩} \times \frac{\text{ى}}{\text{ى س}} (٢\text{س}^٣ + ٩) = \frac{٦\text{س}^٢}{٢\text{س}^٣ + ٩}$

ب) $\because \text{ص} = \text{س}^٤ \text{ لو}_{\text{هـ}} \text{س}^٣ \qquad \therefore \frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}} = \text{س}^٤ \frac{\text{ى}}{\text{ى س}} (\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}^٣) + \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}^٣ \frac{\text{ى}}{\text{ى س}} (\text{س}^٤)$

٤٨ كتاب الرياضيات البحتة - التفاضل والتكامل

---

مشتقات الدوال الأسية واللوغارتمية ٢ - ٢

$= \text{س}^٤ \times \frac{١}{\text{س}^٣} \times ٣\text{س}^٢ + \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}^٣ \times ٤\text{س}^٣$

$= ٣\text{س}^٣ + ٤\text{س}^٣ \text{ لو}_{\text{هـ}} \text{س}^٣ = \text{س}^٣ [٣ + ٤ \text{ لو}_{\text{هـ}} \text{س}^٣]$

ج) $\frac{\text{ى}}{\text{ى س}} \left(\text{لو}_{\text{هـ}} \frac{\text{س}^٢}{\text{س} + ٧}\right) = \frac{\text{س} + ٧}{\text{س}^٢} \times \frac{(\text{س} + ٧)(٢\text{س}) - \text{س}^٢ \times ١}{(\text{س} + ٧)^٢} = \frac{\text{س} + ١٤}{\text{س} (\text{س} + ٧)}$

**حاول أن تحل**

٥) أوجد $\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}}$ لكل مما يأتى:

أ) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}} (٧\text{س} - ٣)^٢$ ب) $\text{ص} = ٢\text{س}^٢ \text{ لو}_{\text{هـ}} \text{س}^٣$ ج) $\text{ص} = \frac{\text{س}}{\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}}$

**تعلم**

**مشتقه الدالة اللوغاريتمية للأساس أ** *Derivative of Logarithmic Function to the Base a*

إذا كانت د(س) = $\text{لو}_{\text{أ}}$ س فإن $\text{د}'(\text{س}) = \frac{١}{\text{س لو}_{\text{هـ}} \text{أ}}$

لاحظ $\frac{\text{ى}}{\text{ى س}} (\text{لو}_{\text{أ}} \text{س}) = \frac{\text{ى}}{\text{ى س}} \left[\frac{\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}}{\text{لو}_{\text{هـ}} \text{أ}}\right] = \frac{١}{\text{لو}_{\text{هـ}} \text{أ}} \frac{\text{ى}}{\text{ى س}} [\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}] = \frac{١}{\text{س}} \cdot \frac{١}{\text{لو}_{\text{هـ}} \text{أ}}$

ويكون $\frac{\text{ى}}{\text{ى س}} (\text{لو}_{\text{أ}} \text{س}) = \frac{١}{\text{س}} \text{ لو}_{\text{أ}} \text{هـ}$

وبوجه عام $\frac{\text{ى}}{\text{ى س}} (\text{لو}_{\text{أ}} \text{ع}) = \frac{١}{\text{ع لو}_{\text{هـ}} \text{أ}} \cdot \frac{\text{ى ع}}{\text{ى س}}$

تذكر أن

من خواص اللوغارتيمات

$\text{لو}_{\text{أ}} \text{س} = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}}{\text{لو}_{\text{هـ}} \text{أ}}$

$\text{لو}_{\text{هـ}} \text{أ} \times \text{لو}_{\text{أ}} \text{هـ} = ١$

**مشتقه الدالة اللوغارتيمية**

**مثال**

٦) أوجد $\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}}$ لكل مما يأتى:

أ) $\text{ص} = \text{لو}_{٣} \text{س}$ ب) $\text{ص} = \text{لو}_{٥} (٣\text{س} - ٢)$ ج) $\text{لو} (٢\text{س} - ٣)^٢$

**الحل**

أ) $\because \text{ص} = \text{لو}_{٣} \text{س} \qquad \therefore \frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}} = \frac{١}{\text{س}} \times \frac{١}{\text{لو}_{\text{هـ}} ٣} \simeq \frac{٠,٩١}{\text{س}}$

ب) $\because \text{ص} = \text{لو}_{٥} (٣\text{س} - ٢) \qquad \therefore \frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}} = \frac{٣}{(٣\text{س} - ٢) \text{ لو}_{\text{هـ}} ٥} \simeq \frac{١,٨٦٤}{٣\text{س} - ٢}$

٤٩ كتاب الطالب - الصف الثالث الثانوى

ج) $\because$ ص = لو |٢س - ٣|  $\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{٢ \times ٢}{(٢س - ٣)^٢ (٢س - ٣) لو_{هـ} ١٠} = \frac{٤}{(٢س - ٣) لو_{هـ} ١٠} \simeq \frac{١,٧٣٧}{٢س - ٣}$

**حاول أن تحل**

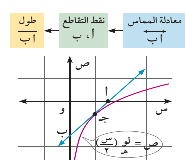
٦) أوجد ميل المماس لكل من المنحنيات التالية عند قيم س المعطاة:

أ) ص = $لو_{٢}$ ٥س ، س = ٢  ب) ص = ٤ لو (٣س + ١) ، س = ١

ج) ص = $لو_{٢}$ $(٢س^٢ - ٣)^٤$ ، س = ١  د) ص = ٣ $(لو س)^٢$ ، س = ٣

٧) تطبيقات هندسية: $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للمنحنى ص = $لو_{هـ} \frac{س}{٢}$ فى النقطة جـ (١ ، ص) ويقطع محور السينات فى النقطة أ، ومحور الصادات فى النقطة ب أوجد طول $\overline{أب}$

**الحل**




لإيجاد طول $\overline{أب}$ نتبع المخطط المقابل

ميل المماس عند أى نقطة: $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١ \times ٢}{س} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{س}$

$\because \overleftrightarrow{أب}$ يمس المنحنى فى النقطة جـ (١ ، ص)

فإن ص = $لو_{هـ} \frac{١}{٢}$ = - $لو_{هـ}$ ٢  أى أن جـ (١ ، - $لو_{هـ}$ ٢)

وتكون معادلة المماس $\overleftrightarrow{أب}$ عند جـ هى:

ص + $لو_{هـ}$ ٢ = س - ١

$\because \overleftrightarrow{أب}$ يقطع محور السينات فى النقطة أ  $\therefore$ أ (١ + $لو_{هـ}$ ٢ ، ٠)

ويقطع محور الصادات فى النقطة ب  $\therefore$ ب (٠ ، - ١ - $لو_{هـ}$ ٢)

ويكون $(أب)^٢ = (١ + لو_{هـ} ٢)^٢ + (١ + لو_{هـ} ٢)^٢$  $\therefore$ أب = $\sqrt{٢}$ (١ + $لو_{هـ}$ ٢)

**حاول أن تحل**

٧) إذا كان العمودى للمنحنى ص = $لو_{هـ}$ ٢س عند النقطة أ (١ ، $لو_{هـ}$ ٢) يقطع محور السينات فى النقطة ب أوجد طول $\overline{أب}$ لأقرب ثلاثة أرقام عشرية.

تطبيقات رياضية

**الاشتقاق اللوغاريتمى** *Logarithmic Differentiation*

يمكن التعبير عن العلاقة بين المتغيرات بصورة لوغاريتمية بأخذ اللوغاريتم الطبيعى لطرفيها واستخدام خواص اللوغاريتمات فى تبسيط العلاقة قبل إجراء عملية الاشتقاق.

**مثال**

٨) أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ لكل مما يأتى:

أ) ص = $(س^٣ + ٥)^{س}$  ب) ص = $[جا س]^{طاس}$





**الحل**

أ) $\because$ ص = $(س^٣ + ٥)^{س}$  بأخذ اللوغاريتم الطبيعى لطرفى العلاقة

$\therefore لو_{هـ}$ ص = س $لو_{هـ} (س^٣ + ٥)$  باشتقاق طرفى العلاقة بالنسبة إلى س

$\frac{١}{ص} \frac{ءص}{ءس} = لو_{هـ} (س^٣ + ٥) + \frac{س}{س^٣ + ٥} \times ٣س^٢$  بضرب الطرفين × ص = $(س^٣ + ٥)^{س}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = (س^٣ + ٥)^{س} [\frac{٣س^٣}{س^٣ + ٥} + لو_{هـ} (س^٣ + ٥)]$

ب) $\because$ ص = $[جا س]^{طاس}$  يأخذ اللوغاريتم الطبيعى لطرفى العلاقة

$لو_{هـ}$ ص = طا س $لو_{هـ}$ جا س  باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

$\frac{١}{ص} \frac{ءص}{ءس} = طا س \times \frac{ء}{ءس} (لو_{هـ} جا س) + لو_{هـ} جا س \times \frac{ء}{ءس} (طاس)$

$= \frac{جا س}{جتا س} \times \frac{١}{جا س} \times جتا س + لو_{هـ} جا س \times قا^٢س$

$= ١ + قا^٢س\ لو_{هـ} جا س$  بضرب الطرفين × ص = $[جا س]^{طاس}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = [جاس]^{طاس} (١ + قا^٢س\ لو_{هـ} جا س)$

**حاول أن تحل**

٨) أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ لكل مما يأتى

أ) ص = $س^{٢س}$  ب) ص = $(جاس)^{س}$  ج) $ص^٢ = ٣^{س} \times ٢^{ص}$

٩) تحقيق علاقة: إذا كانت ص = $هـ^{-س} \sqrt{\frac{١ + س}{١ - س}}$  أثبت أن: $(١ - س^٢)$ صَ = $س^٢$ ص

**الحل**

$\because$ ص = $هـ^{-س} \sqrt{\frac{١ + س}{١ - س}}$  بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

$\therefore لو_{هـ}$ ص = $لو_{هـ} هـ^{-س} + \frac{١}{٢} لو_{هـ} \frac{١ + س}{١ - س}$

$لو_{هـ}$ ص = - س + $\frac{١}{٢}$ [$لو_{هـ}$ (١ + س) - $لو_{هـ}$ (١ - س)]

بتفاضل طرفى العلاقة بالنسبة إلى س

$\frac{١}{ص} \times صَ = -١ + \frac{١}{٢} [\frac{١}{١ + س} - \frac{-١}{١ - س}]$

$\frac{صَ}{ص} = -١ + \frac{١}{٢} [\frac{١ - س + ١ + س}{١ - س^٢}]$

$\frac{صَ}{ص} = -١ + \frac{١}{١ - س^٢} = \frac{-١ + س^٢ + ١}{١ - س^٢}$

$\frac{صَ}{ص} = \frac{س^٢}{١ - س^٢}$  $\therefore (١ - س^٢)$ صَ = $س^٢$ ص



## حاول أن تحل ٨

أ) $لو_{هـ}$ ص = ٢س $لو_{هـ}$ س

$\frac{١}{ص} \times \frac{ءص}{ءس} = ٢ لو_{هـ} س + ٢س \times \frac{١}{س}$

$\frac{ءص}{ءس} = س^{٢س} [٢ لو_{هـ} س + ٢]$

ب) $لو_{هـ}$ ص = س $لو_{هـ}$ جا س

$\therefore \frac{١}{ص} \frac{ءص}{ءس} = ١ لو_{هـ} جا س + س \times \frac{١}{جا س} \times جتا س$

$\frac{ءص}{ءس} = (جا س)^{س} [لو_{هـ} جا س + س ظتا س]$

ج) $ص^٢ = ٣^{س} \times ٢^{ص}$

$\therefore ٢ لو_{هـ} ص = لو_{هـ} ٣^{س} + لو_{هـ} ٢^{ص}$

$٢ لو_{هـ} ص = س لو_{هـ} ٣ + ص لو_{هـ} ٢$

$\frac{٢}{ص} \frac{ءص}{ءس} = لو_{هـ} ٣ + \frac{ءص}{ءس} \times لو_{هـ} ٢$

$\frac{ءص}{ءس} [\frac{٢}{ص} - لو_{هـ} ٢] = لو_{هـ} ٣$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{لو_{هـ} ٣}{\frac{٢}{ص} - لو_{هـ} ٢}$

## حاول أن تحل ٩

$\because ص = أ هـ^{\frac{ب}{س}}$  $\therefore لو_{هـ} ص = لو_{هـ} أ هـ^{\frac{ب}{س}}$

$لو_{هـ} ص = لو_{هـ} أ + \frac{ب}{س} لو_{هـ} هـ = لو_{هـ} أ + \frac{ب}{س}$

$س لو_{هـ} ص = س لو_{هـ} أ + ب$

$لو_{هـ} ص + \frac{س}{ص} \times صَ = لو_{هـ} أ$ (١)  بالضرب × ص

$ص لو_{هـ} ص + س صَ = ص لو_{هـ} أ$  بالاشتقاق مرة ثانية

$صَ لو_{هـ} ص + ص \times \frac{١}{ص} \times صَ + س صً + صَ = صَ لو_{هـ} أ$

$صَ لو_{هـ} ص + ٢صَ + س صً - صَ لو_{هـ} أ = ٠$

$صَ [لو_{هـ} ص - لو_{هـ} أ] + ٢صَ + س صً = ٠$

$\therefore س ص صً + ٢ص صَ - س صَ^٢ = ٠$

من (١) $لو_{هـ} ص - لو_{هـ} أ = - \frac{س}{ص} \times صَ$ ،  بالتعويض فى (٢)

$\therefore \frac{س صَ^٢}{ص} + ٢صَ + س صً = ٠$  بالضرب × ص

حاول أن تحل

٩ إذا كانت ص = أهـ$^{\frac{ب}{س}}$ اثبت أن: س ص ص$''$ + ٢ ص ص$'$ - س ص$'^{٢}$ = ٠

## تمارين ٢ - ٢

**اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة**

١ إذا كانت د(س) = هـ$^{٣س}$ فإن د$'$(س) تساوى:

أ هـ$^{٣س}$ ب ٣هـ$^{٣س}$ ج ٩هـ$^{٣س}$ د ٣هـ$^{٢س}$

٢ إذا كان د(س) = أهـ$^{س}$ فإن د$'$(-٢) تساوى:

أ - د(٢) ب - د$'$(٢) ج - د(-٢) د د(-٢)

٣ منحنى الدالة د: د(س) = ١ + لو$_{هـ}$ (س - ٢) هو نفس منحنى الدالة ر: ر(س) = لو$_{هـ}$ س بالانتقال:

أ (١ ، ٢) ب (١ ، -٢) ج (-٢ ، ١) د (٢ ، ١)

٤ النسبة بين ميل مماس المنحنى ص = لو$_{هـ}$ ٣$\sqrt{س + ١}$ وميل مماس المنحنى ص = لو$_{هـ}$ ٥$\sqrt{س + ١}$ عند س = أ كنسبة

أ ٣ : ٥ ب ٥ : ٣ ج ١ : ١ د لو$_{هـ}$ ٣ : لو$_{هـ}$ ٥

**أوجد المشتقة الأولى لكل من:**

٥ ص = هـ$^{٣س^{٥}}$ ٦ ص = هـ$^{س^{٢} - س}$ ٧ ص = (٣س$^{-١}$)$^{-٢}$

٨ ص$^{٢}$ = هـ$^{٥س^{٢} - ٣}$ ٩ ص = لو$_{هـ}$ (٢س - ٧) ١٠ ص = لو$_{هـ}$ ($\frac{١}{٢}$س$^{٢}$ + س)

١١ ص = لو$_{هـ}$ $\frac{س^{٢}}{س + ٧}$ ١٢ ص = س$^{٢}$ لو$_{هـ}$ س ١٣ ص = لو$_{٣}$ (٤س + ٩)$^{٢}$

١٤ ص = $\frac{هـ^{٣س}}{لوس}$ ١٥ ص = قاهـ$^{س}$ ١٦ ص = ٢هـ$^{٣س}$ - ٥ لو$_{٢}$ $\frac{س}{٥}$

**أوجد ميل المماس لكل من المنحنيات التالية عند القيم المعطاة:**

١٧ ص = $\sqrt{س}$ - ٢هـ$^{س}$ ، س = $\frac{١}{٤}$

١٨ ص = س$^{٢}$ - ٣لو$_{هـ}$ س ، س = ٢

١٩ ص = $\frac{١}{٤}$ هـ$^{٢س}$ - ٢لو$_{هـ}$ س ، س = $\frac{١}{٢}$



## حلول تمارين (٢ - ٢)

١ ب ٢ د

٣ د ٤ ب

٥ $\frac{ءص}{ءس}$ = هـ$^{٣س^{٥}}$ × ١٥س$^{٤}$ = ١٥س$^{٤}$ هـ$^{٣س}$

٦ $\frac{ءص}{ءس}$ = هـ$^{٢س - س}$ × (٢س - ١)

٧ $\frac{ءص}{ءس}$ = -٢ (٣س$^{-١}$)$^{-٣}$ × ٣س$^{-١}$ لو$_{هـ}$ ٣

٨ ٢ص $\frac{ءص}{ءس}$ = هـ$^{٥س^{٢} - ٣}$ × ١٠س

$\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{٥س}{ص}$ هـ$^{٥س^{٢} - ٣}$

٩ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{٢}{٢س - ٧}$

١٠ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{س + ١}{\frac{١}{٢}س^{٢} + س}$ = $\frac{٢(س + ١)}{س^{٢} + ٢س}$

١١ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{س + ٧}{س^{٢}}$ × $\frac{(س + ٧) × ٢س - س^{٢}}{(س + ٧)^{٢}}$

= $\frac{س^{٢} + ١٤س}{س^{٢} (س + ٧)}$ = $\frac{س + ١٤}{س (س + ٧)}$

١٢ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢س لو$_{هـ}$ س + س$^{٢}$ × $\frac{١}{س}$

= ٢س لو$_{هـ}$ س + س = س (٢ لو$_{هـ}$ س + ١)

١٣ ص = ٢ لو$_{هـ}$ (٤س + ٩)

$\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ × $\frac{١}{(٤س + ٩)}$ × $\frac{١}{لو_{هـ} ٣}$ × ٤

= $\frac{٨}{(٤س + ٩) لو_{هـ} ٣}$

١٥ $\frac{ءص}{ءس}$ = قا هـ$^{س}$ ظا هـ$^{س}$ × هـ$^{س}$

= هـ$^{س}$ قا هـ$^{س}$ × ظا هـ$^{س}$

١٦ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ × ٣هـ$^{٣س}$ - ٥ × $\frac{٥}{س}$ × $\frac{١}{لو_{هـ} ٢}$ ٢٥

= ٦ هـ$^{٣س}$ - $\frac{}{س لو_{هـ} ٢}$

١٧ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$ - ٢هـ$^{س}$ عند س = $\frac{١}{٤}$

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ١ - ٢ هـ$^{\frac{١}{٤}}$ ≃ -١,٥٧

١٨ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢س - $\frac{٣}{س}$ عند س = ٢

$\frac{ءص}{ءس}$ = ٤ - $\frac{٣}{٢}$ = ٢$\frac{١}{٢}$

١٩ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{١}{٤}$ × ٢هـ$^{٢س}$ - ٢ × $\frac{١}{س}$ عند س = $\frac{١}{٢}$

$\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{١}{٢}$ هـ - ٤ ≃ -٢,٦٤

٢٠ ص هـ$^{س}$ + هـ$^{س}$ × صَ = صفر

∵ هـ$^{س}$ ≠ صفر

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = - ص

**أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ لكل مما يأتى:**

٢٠ $\text{ص هـ}^{\text{س}} = \text{هـ}^{٣}$ ٢١ $\text{س لو}_{\text{هـ}} \text{ص} = ٥٨$ ٢٢ $\text{ص} = \text{س}^{\text{جاس}}$

٢٣ $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{هـ}^{\text{س}}}$ ٢٤ $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}^{\text{هـ}}}$ ٢٥ $\text{ص} = \text{س}^{\frac{١}{\text{س}}}$

**أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ ، $\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}}$ لكل مما يأتى:**

٢٦ $\text{س} = \text{هـ}^{٢\text{ن}}$ ، $\text{ص} = \text{ن}^{٣}$

٢٧ $\text{س} = ٦\text{لو}_{\text{هـ}} \text{ن}$ ، $\text{ص} = \text{ن}^{٢}$

٢٨ إذا كانت $\text{ص} = \text{س}^{٢} \text{لو}_{\text{هـ}} \frac{\text{س}}{\text{أ}}$ فأوجد $\frac{\text{د}^{٣}\text{ص}}{\text{دس}^{٣}}$ عند $\text{س} = ٤$

٢٩ إذا كانت $\text{هـ}^{\text{س}} = \sum_{\text{ن}=٠}^{\infty} \frac{\text{س}^{\text{ن}}}{\text{ن}!}$ (مفكول تايلور) أثبت أن: $\frac{\text{د}}{\text{دس}} (\text{هـ}^{\text{س}}) = \text{هـ}^{\text{س}}$

٣٠ إذا كانت $\text{ص} = \sqrt{\frac{\text{س}^{٢}+١}{\text{س}^{٢}-١}}$ أثبت أن $(\text{س}^{٤} - ١) \text{ص}' - ٢\text{س ص} = ٠$

٣١ أوجد قيم س التى يكون عندها مماس المنحنى $\text{ص} = ٩\text{س}^{٣} - ٨\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}$ موازيًا لمحور السينات.

٣٢ أوجد معادلة العمودى للمنحنى $\text{ص} = ٣\text{هـ}^{\text{س}}$ عند نقطة واقعه عليه و إحداثيها السينى يساوى -١

٣٣ الربط بالصناعة: إذا كان الإنتاج اليومى لأحد المصانع خلال فترة زمنية ن (يومًا) يتعين بالعلاقة $\text{ص} = ٤٠٠ (١ - \text{هـ}^{-٠,٣\text{ن}})$ وحدة أوجد معدل التغير فى عدد الوحدات المنتجه بالنسبة للزمن فى اليوم العاشر.

٣٤ استهلاك المياه: يقدر متوسط استهلاك الفرد من المياه سنويًّا بالعلاقة: $\text{ص} = ٦٠٠ [١ + \text{هـ}^{(٠,٠٣ - ٢٠١٠)}]$ حيث ن الزمن بالسنوات ، ص استهلاك المياه بالمتر المكعب.

أ احسب معدل تغير الاستهلاك بالنسبة للزمن.

ب احسب معدل التغير عن عام ٢٠١٠ ، عام ٢٠١٦ وقارن بينهما. بماذا تنصح؟



٣٥ تعداد مجتمع: إذا كان حجم خلية نحل العسل يُعطَى بالعلاقة $\text{ص} = (\text{ن} + ١٠٠) \text{لو}_{\text{هـ}} (\text{ن} + ٥)$ ، حيث ن الزمن باليوم ، ص عدد نحل الخلية. أوجد معدل حجم الخلية عند ن = ٥ ، ن = ١٥ ، ن = ٢٠. هل يتزايد حجم الخلية أم يتناقص؟



**٢٣** $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{هـ}^{\text{س}}}$

$$\therefore \text{لو}_{\text{هـ}} \text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}} \text{لو}_{\text{هـ}} \text{هـ}$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}} \text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$$

$$\therefore \frac{١}{\text{ص}} \text{ص}' = \text{هـ}^{\text{س}}$$

$$\text{ص}' = \text{ص هـ}^{\text{س}}$$

**٢٤** $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}^{\text{هـ}}}$

$$\therefore \text{لو}_{\text{هـ}} \text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}} \text{هـ}^{\text{س}^{\text{هـ}}}$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}} \text{ص} = \text{س}^{\text{هـ}} \text{لو}_{\text{هـ}} \text{هـ}$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}} \text{ص} = \text{س}^{\text{هـ}}$$

$$\frac{١}{\text{ص}} \text{ص}' = \text{هـ س}^{\text{هـ}-١}$$

$$\text{ص}' = \text{هـ س}^{\text{هـ}-١} \times \text{هـ}^{\text{س}^{\text{هـ}}}$$

**٢٥** $\text{ص} = \text{س}^{\frac{١}{\text{س}}}$

$$\therefore \text{لو}_{\text{هـ}} \text{ص} = \frac{١}{\text{س}} \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}$$

$$\frac{١}{\text{ص}} \text{ص}' = \frac{-١}{\text{س}^{٢}} \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} + \frac{١}{\text{س}} \times \frac{١}{\text{س}}$$

$$\frac{١}{\text{ص}} \text{ص}' = \frac{-١}{\text{س}^{٢}} [\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} - ١]$$

$$\text{ص}' = \frac{-\text{ص}}{\text{س}^{٢}} [\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} - ١]$$

**٢٧**

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دن}} \div \frac{\text{دس}}{\text{دن}}$$

$$= \frac{٢\text{ن}}{٦ \times \frac{١}{\text{ن}}} = \frac{١}{٣} \text{ن}^{٢}$$

$$\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}} = \frac{٢}{٣} \text{ن} \times \frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \frac{٢}{٣} \text{ن} \times \frac{٦}{\text{ن}} = ٤$$

**٣١** ميل المماس للمنحنى $\text{ص} = ٩\text{س}^{٣} - ٨ \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢٧\text{س}^{٢} - ٨ \times \frac{١}{\text{س}}$$

المماس محور السينات $\therefore \text{ص}' = ٠$

$$= \frac{١}{\text{س}} (٢٧\text{س}^{٣} - ٨) \qquad = \frac{٢}{٣}$$

∴ المماس يوازى محور السينات عند $\text{س} = \frac{٢}{٣}$

**٣٣** $\because \text{ص} = ٤٠٠ (١ - \text{هـ}^{-٠,٣\text{ن}})$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٤٠٠ (-\text{هـ}^{-٠,٣\text{ن}} \times -٠,٣)$$

$$= ٤٠٠ (٠,٣ \text{ هـ}^{-٠,٣\text{ن}})$$

$$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دن}}\right|_{\text{ن}=١٠} = ٤٠٠ (٠,٣ \text{ هـ}^{-٣}) = ١٢٠ \text{ هـ}^{-٣}$$

**٣٥**

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (\text{ن} + ١٠٠) \times \frac{١}{\text{ن} + ٥} + \text{لو}_{\text{هـ}} (\text{ن} + ٥) \times ١$$

$$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دن}}\right|_{\text{ن}=٥} = ١٠٥ \times \frac{١}{١٠} + \text{لو}_{\text{هـ}} ١٠ = ١٠,٥ + \text{لو}_{\text{هـ}} ١٠$$

$$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دن}}\right|_{\text{ن}=١٥} = ١١٥ \times \frac{١}{٢٠} + \text{لو}_{\text{هـ}} ٢٠ = ٥ \frac{٣}{٤} + \text{لو}_{\text{هـ}} ٢٠$$

$$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دن}}\right|_{\text{ن}=٢٠} = ١٢٠ \times \frac{١}{٢٥} + \text{لو}_{\text{هـ}} ٢٥ = ٤ \frac{٤}{٥} + \text{لو}_{\text{هـ}} ٢٥$$

# ٢ - ٣

# تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية

**Integrals of Exponential and Logarithmic Function**



## ٢ - ٣ تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية

**Integrals of Exponential and Logarithmic Function**

**سوف تتعلم**

- تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية.
- تطبيقات هندسية.
- تطبيقات فيزيائية.

**المصطلحات الأساسية**

- مشتقة عكسية *Antiderivative*
- تكامل *Integration*
- تكامل غير محدد *Indefinite integral*
- ثابت اختيارى *Arbitrary constant*

**الأدوات المستخدمة**

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسب الآلى.

### استكشف

من دراستك السابقة فى التفاضل تعلم أن مشتقة الدالة ى بالنسبة إلى س حيث ى(س) = هـ^س + ٥ هى ى/(س) = هـ^س

إذا رمزنا للدالة ى/(س) بالرمز د(س) فإننا نستطيع بعملية عكسية (التكامل غير المحدد) إيجاد عدد غير محدد من الدوال الأخرى (ت(س) + ث) مشتقة كل منها يساوى د(س) تسمى بمجموعة المشتقات العكسية للدالة د إحداها يساوى ى(س) حيث:

∫ د(س) ء س = ت(س) + ث    حيث ث ثابت اختيارى



**استكشف مجموعة المشتقات العكسية لكل من:**

د(س) = ٥هـ^٥س   ،    ر(س) = ٨هـ^٤س   ،    ى(س) = ١/س

### تعلم

**التكامل غير المحدد للدالة الأسية**

*Indefinite Integrals of Exponential Function*

> إذا كان ك عددًا حقيقيًّا حيث ك ≠ ٠
>
> فإن: ∫ هـ^س ء س = هـ^س + ث
>
> ، ∫ هـ^كس ء س = ١/ك هـ^كس + ث    حيث ث ثابت اختيارى

**مضاعفات الدالة**

**مثال**

١ أوجد:

أ ∫ هـ^٧س ء س     ب ∫ هـ^(-٣/٤ ص) ء ص     ج ∫ ٨ هـ^٢ع ء ع

**الحل**

أ ∫ هـ^٧س ء س = ١/٧ هـ^٧س + ث

٥٤    كتاب الرياضيات البحتة - التفاضل والتكامل

## خلفية

سبق للطالب أن تعلم أن التكامل هو عملية ايجاد مجموعة المشتقات العكسية للدالة د حيث

∫ د (س) د س = ت (س) + ث

وفى هذا الدرس سوف يدرس تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية ثم يحل عليها تطبيقات هندسية وأخرى فيزيائية.

## مخرجات التعلم:

**فى نهاية هذا الدرس وتنفيذ الأنشطة فيه من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:**

- يوجد تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية
- يحل تطبيقات هندسية على تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية.
- يحل تطبيقات فيزيائية على تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية.

## مفردات أساسية:

مشتقة عكسية - تكامل - تكامل غير محدد - ثابت اختيارى

## المواد التعليمية المستخدمة:

السبورة التعليمية - طباشير ملون - آلة حاسبة علمية - برامج رسومية للحاسوب.

## مكان التدريس:

الفصل الدراسى

## مصادر التعلم:

كتاب الطالب من ص(٣٨) حتى ص(٤٤)

## تهيئة:

ناقش طلابك فى المخطط المرسوم ص(٥٤) والذى يوضح إيجاد عدد غير محدود من الدوال بإيجاد العملية العكسية للدالة قَ (س) ولتكن إحداهما هى ى(س) حيث:

∫ د(س) ء س = ت (س) + ث

ثم اطلب إليهم إيجاد المشتقات العكسية للدوال فى نهاية بند ا كتشف.

## التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

ناقش مع طلابك ما ورد فى بند حاول أن تحل ص(٥٥)، ص(٥٦) وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة.

## حاول أن تحل

(١)

أ) $\int \pi$ هـ$^{س}$ ء س $= \pi$ هـ$^{س}$ + ث

ب) $\int \pi$ هـ$^{-٥ع}$ $= -\frac{١}{-٥}$ هـ$^{-٥ع}$ + ث

$= \frac{١}{٥}$ هـ$^{-٥ع}$ + ث

جـ) $\int$ -٦هـ$^{٠,٢ص}$ ء ص $= -\frac{-٦}{٠,٢}$ هـ$^{٠,٢ص}$ + ث

$= -٣٠$ هـ$^{٠,٢ص}$ + ث

## (٢) حاول أن تحل (٥٥)

أ) $\int$ (١ + هـ$^{-٢س}$) ء س = س $- \frac{١}{٢}$ هـ$^{-٢س}$ + ث

ب) $\int$ (س$^{٢}$ + ٢هـ$^{س}$) ء س $= \frac{١}{٣}$ س$^{٣}$ + ٢هـ$^{س}$ + ث

جـ) $\int$ (س$^{هـ٢}$ + هـ$^{٣س}$) ء س $= \frac{١}{هـ٢ + ١}$ س$^{هـ٢+١}$ + $\frac{١}{٣}$ هـ$^{٣س}$ + ث

## (٣) حاول أنت تحل ص٥٦

أ) $\int$ (جتا س هـ$^{جا س}$ + ٣س$^{٢}$) ء س

بوضع جا س = د(س)

∴ دَ(س) = جتا س

∴ $\int$ (جتا س هـ$^{جا س}$ + ٣س$^{٢}$) ء س = هـ$^{جا س}$ + س$^{٣}$ + ث

ب) $\int$ (س - ٣) هـ$^{س٢ - ٦س + ٥}$ ء س $= \frac{١}{٢}$ هـ$^{س٢ - ٦س + ٥}$ + ث

## في بند تفكير ناقد ص (٥٦)

يهدف هذا التفكير على تذكر الطالب بأن:

$أ =$ هـ$^{لو_{هـ} أ}$

**الحل:**

∵ $\frac{ء}{ء س}$ أ$^{س}$ = أ$^{س}$ × لو$_{هـ}$ أ

∴ $\int$ أ$^{س}$ ء س = أ$^{س}$ × $\frac{١}{لو_{هـ} أ}$ + ث

∴ $\int$ ٣$^{س}$ ء س = $\frac{٣^{س}}{لو_{هـ} ٣}$ + ث

## التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

ناقش مع طلابك ما ورد فى بند حاول أن تحل وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة.





## حاول أن تحل

### ④

أ) $\int لو_{هـ} ٣ \frac{١}{س} ءس = لو_{هـ} ٣ \times لو_{هـ} |س| + ث$

ب) $\int \frac{٤}{٣ لو_{هـ} ٥} \times \frac{١}{س} ءس = \frac{٤}{٣ لو_{هـ} ٥} \times لو_{هـ} |س| + ث$

جـ) $\int \frac{٢ لو_{هـ} س}{٣س لو_{هـ} س} ءس = \int \frac{٢}{٣س} ءس = \frac{٢}{٣} لو_{هـ} |س| + ث$

### ⑤ ص٥٧

أ) $\int (٢س - \frac{٥}{٣}) ءس = س^{٢} - \frac{٥}{٣} | لو_{هـ} |س| + ث$

ب) $\int \frac{(س - ٢)(س + ٢)}{س(س - ٢)} ءس \int (١ + \frac{٢}{س}) ءس$

$= س + ٢ \, | لو_{هـ} |س| + ث$

جـ) $\int (س - ٦ + \frac{٩}{س}) ءس = \frac{١}{٢} س^{٢} - ٦س + ٩ \, | لو_{هـ} |س| + ث$

### ⑥ ص ٥٨

أ) $\int \frac{٦}{٢س + ٣} ءس = ٣ \int \frac{٢}{٢س + ٣} ءس$

$= ٣ لو_{هـ} |٢س + ٣| + ث$

ب) $\int \frac{(س - ٢)(س + ٢)}{س(س + ٢)} ءس \int (١ - \frac{٢}{س}) ءس$

$= س - ٢ لو_{هـ} |س| + ث$

جـ) $\int \frac{س^{٢} + ٢}{س^{٣} + ٦س + ١} ءس = \frac{١}{٣} \int \frac{٣س^{٢} + ٦}{س^{٣} + ٦س + ١} ءس$

$= \frac{١}{٣} لو_{هـ} |س^{٣} + ٦س + ١| + ث$

## تفكير ناقد

$\int ظا س ءس = \int \frac{جا س}{جتا س} ءس = - \int \frac{- جا س}{جتا س} ءس$

$= - لو_{هـ} |جتا س| + ث$

## حاول أن تحل ٧ ص٥٨

$\because \frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢س + هـ} \qquad \therefore ص = \frac{١}{٢} \int \frac{٢}{٢س + هـ} ءس$

$ص = \frac{١}{٢} لو_{هـ} |٢س + هـ| + ث$

$٢ = \frac{١}{٢} لو_{هـ} |٣هـ| + ث \qquad \therefore ٢ = \frac{٣}{٢} + ث \qquad \therefore ث = \frac{١}{٢}$

$ص = \frac{١}{٢} لو_{هـ} |٢س + هـ| + \frac{١}{٢} ء(٢هـ) = \frac{١}{٢} لو_{هـ} |٥هـ| + \frac{١}{٢} = ٣$



**المجموع والفرق**

**مثال**

⑤ أوجد كلًّا من التكاملات الآتية:

أ) $\int (٣س^{٢} + \frac{٥}{س}) ءس$ ب) $\int (\frac{٢هـ}{س} - \frac{س}{هـ}) ءس$ جـ) $\int \frac{(٣س - ١)^{٢}}{س^{٣}}$

**الحل**

أ) $\int (٣س^{٢} + \frac{٥}{س}) ءس = \int ٣س^{٢} ءس + \int \frac{٥}{س} ءس = س^{٣} + ٥ لو_{هـ} |س| + ث$

ب) $\int (\frac{٢هـ}{س} - \frac{س}{هـ}) ءس = ٢هـ \int \frac{١}{س} ءس - \frac{١}{هـ} \int س ءس = ٢هـ لو_{هـ} |س| - \frac{س^{٢}}{٢هـ} + ث$

جـ) $\int \frac{(٣س - ١)^{٢}}{س^{٣}} ءس = \int \frac{٩س^{٢} - ٦س + ١}{س^{٣}} ءس = \int (٣س - ٢ + \frac{١}{س}) ءس$

$= \frac{٣س^{٢}}{٢} - ٢س + \frac{١}{٣} لو_{هـ} |س| + ث$ حيث $س \neq ٠$

**حاول أن تحل**

⑤ أوجد كلًّا من التكاملات الآتية:

أ) $\int \frac{٦س^{٢} - ٥}{س^{٣}} ءس$ ب) $\int \frac{س^{٢} - ٤}{س^{٢} - ٢س} ءس$ جـ) $\int (\sqrt{س} - \frac{٣}{س\sqrt{س}})^{٢} ءس$

لاحظ أن: إذا كانت د دالة قابلة للاشتقاق، د(س) ≠ ٠ فإن $\int \frac{١}{د(س)} د'(س) ءس = لو_{هـ} |د(س)| + ث$

**دالة الدالة**

**مثال**

⑥ أوجد كلًّا من التكاملات التالية:

أ) $\int \frac{٤}{٢س + ١} ءس$ ب) $\int \frac{س + ٣}{س^{٢} + ٦س - ٢} ءس$ جـ) $\int \frac{٢}{س لو_{هـ} س} ءس$

**الحل**

أ) $\because (٢س + ١)' = ٢ \quad \therefore \int \frac{٤}{٢س + ١} ءس = ٢ \int \frac{(٢س + ١)'}{٢س + ١} ءس = ٢ لو_{هـ} |٢س + ١| + ث$

ب) $\because (س^{٢} + ٦س - ٢)' = ٢س + ٦$

$\therefore \int \frac{س + ٣}{س^{٢} + ٦س - ٢} ءس = \frac{١}{٢} لو_{هـ} |س^{٢} + ٦س - ٢| + ث$

جـ) $\because (لو_{هـ} س)' = \frac{١}{س} \quad \therefore \int \frac{٢}{س لو_{هـ} س} ءس = ٢ \int \frac{١}{لو_{هـ} س} \cdot \frac{١}{س} ءس$

$= ٢ لو_{هـ} |لو_{هـ}(س)| + ث$





**حاول أن تحل**

⑥ أوجد كلًّا من التكاملات الآتية:

أ) $\int \frac{٦}{٢س + ٣} ءس$ ب) $\int \frac{س^{٢} - ٤}{س^{٢} + ٢س} ءس$ جـ) $\int \frac{(س^{٢} + ٢) ءس}{س^{٣} + ٦س + ١}$

تفكير ناقد: هل العبارة $\int ظا س ءس = - لو_{هـ} جتا س + ث$ صحيحة؟ فسر إجابتك.

**مثال**

⑦ تطبيقات هندسية: منحنى ميل المماس له عند أى نقطة عليه (س، ص) يساوى $\frac{٣س + ٢}{س}$ أوجد معادلة المنحنى إذا عُلم أنه يمر بالنقطة (هـ، ٣هـ + ٥)

**الحل**

بفرض معادلة المنحنى ص = د(س)

∵ الميل للمماس عند أى نقطة $= \frac{ءص}{ءس} = \frac{٣س + ٢}{س}$

$\therefore ص = \int \frac{ءص}{ءس} ءس = \int (٣ + \frac{٢}{س}) ءس$

∴ ص = ٣س + ٢ لو س + ث حيث ث ثابت اختيارى

∵ المنحنى يمر بالنقطة (هـ، ٣هـ + ٥) فهى تحقق معادلته أى إن:

٣هـ + ٥ = ٣(هـ) + ٢ لو هـ + ث ∴ ث = ٣

و تكون معادلة المنحنى هى: ص = ٣س + ٢ لو س + ٣

معادلة المنحنى ص = د(س)

تفاضل

تكامل

+ ث

ميل مماس المنحنى $\frac{ءص}{ءس} = د'(س)$

**حاول أن تحل**

⑦ ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أى نقطة عليه (س، ص) يساوى $\frac{١}{٢س + هـ}$ وكان د(هـ) = ٢ أوجد د(٢هـ)

**مثال**

⑧ تطبيقات فيزيائية: إذا كان معدل التغير فى مساحة سطح صفيحة م (بالسنتيمتر المربع) بالنسبة للزمن ن (بالثانية) يتعين بالعلاقة  وكانت مساحة الصفيحة عند بداية التغير تساوى ٨٠سم٢، أوجد مساحة سطح الصفيحة بعد ١٠ ثوانٍ.

**الحل**

مساحة سطح الصفيحة م = $\int \frac{ءم}{ءن} ءن = \int هـ^{٠٫١ن} ءن$

∴ م = ١٠هـ$^{٠٫١ن}$ + ث

عند بداية التغير ن = ٠ ، م = ٨٠ ∴ ث = ٩٠

ويكون مساحة سطح الصفيحة فى أى لحظة م = ٩٠ - ١٠هـ$^{٠٫١ن}$

بعد ١٠ ثوانٍ ∴ مساحة سطح الصفيحة = ٩٠ - ١٠هـ$^{١}$ ≃ ٨٦٫٣٢١سم٢

**حاول أن تحل**

٨ اذا كان معدل تغير مبيعات أحد المصانع يتناسب عكسيًا مع الزمن بالأسابيع، وكانت مبيعات المصنع بعد أسبوعين و٤ أسابيع هى على الترتيب ٢٠٠، ٣٠٠ وحدة. أوجد مبيعات المصنع بعد ٦ أسابيع

## تمـاريـن ٢ – ٣

**اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:**

١ إذا كان $د''(س) = \frac{١}{٢}[هـ^{س} + هـ^{-س}]$ ، $د(٠) = ١$ ، $د'(٠) = ٠$ فإن د(س) تساوى:
أ $-د'(س)$ ب $د'(س)$ ج $-د''(س)$ د $د''(س)$

٢ إذا كان ميل المماس لمنحنى عند أى نقطة عليه (س ، ص) يساوى $٤هـ^{٢س}$ ، $د(٠) = ٢$ فإن د(-٢) تساوى:
أ ٤ ب $٤هـ^{-٤}$ ج $٢هـ^{-٤}$ د ٢هـ

٣ $\int طا\theta \, ى\theta$ تساوى
أ $-لو_{هـ}|جتا\theta| + ث$ ب $-لو_{هـ} جتا\theta + ث$ ج $لو_{هـ} جتا\theta + ث$ د $|لو_{هـ} جتا\theta| + ث$

٤ $\int ٤س هـ^{س^٢} ى س$ تساوى
أ $\frac{١}{٢}هـ^{س^٢} + ث$ ب $هـ^{س^٢} + ث$ ج $٢هـ^{س^٢} + ث$ د $٤هـ^{س^٢} + ث$

**أوجد كلًّا من التكاملات الآتية:**

٥ $\int هـ^{٤س} ى س$
٦ $\int (٣س^٢ + ٢هـ^{س}) ى س$
٧ $\int (\frac{٤}{س} - هـ^{-س}) ى س$
٨ $\int هـ^{١-٣س} ى س$
٩ $\int \frac{٧}{٣} هـ^{٣س-٤} ى س$
١٠ $\int ٢هـ^{س}(هـ^{س} + ١)^٢ ى س$
١١ $\int \frac{هـ^{٣س} + ٢هـ^{٢س} + ٤}{هـ^{س}} ى س$
١٢ $\int س^٢ هـ^{س^٣+١} ى س$
١٣ $\int \frac{٢هـ^{س}}{هـ^{س} + ١} ى س$
١٤ $\int (٣ - ع^٢) هـ^{٩ع - ع^٣} ى ع$
١٥ $\int \frac{هـ^{\sqrt{م}}}{\sqrt{م}} ى م$
١٦ $\int -٧ص هـ^{-٢ص^٢} ى ص$
١٧ $\int (٣ + \frac{١}{س}) ى س$
١٨ $\int \frac{١}{٧س} ى س$
١٩ $\int \frac{١}{س لو_{هـ} ٢} ى س$
٢٠ $\int (لو_{هـ} ٢ + \frac{٣}{س}) ى س$
٢١ $\int (٣ + \frac{١}{س})^٢ ى س$
٢٢ $\int \frac{١}{١ - ٧س} ى س$
٢٣ $\int \frac{٣س^٢}{س^٣ - ١} ى س$
٢٤ $\int \frac{٣س^٢ - ٥}{س^٣ - ٥س + ١} ى س$
٢٥ $\int \frac{٤هـ^{س} + س هـ^{٢س}}{س هـ^{س}} ى س$
٢٦ $\int \frac{٤}{س لو_{هـ} ٣س} ى س$
٢٧ $\int \frac{(١ + لو_{هـ} س)^٢}{س} ى س$

٢٨ تطبيقات هندسية: إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أى نقطة (س ، ص) يساوى $٢هـ^{-\frac{س}{٢}}$ ، د(٠) = ١ أوجد د(٣)



## تمارين (٢ – ٣)

### اسئلة الاختيار

١ د ٢ جـ

٣ أ ٤ جـ

٥ $\frac{١}{٤} س هـ^{س} + ث$ ٦ $س^٣ + ٢هـ^{س} + ث$

٧ $٤ لو_{هـ}|س| هـ^{-س} + ث$

٨ $\frac{-١}{٣} هـ^{١-٣س} + ث$

٩ $\frac{٧}{٩} هـ^{٣س-٤} + ث$

١٠ $\int (٢هـ^{٣س} + ٤هـ^{٢س} + ٢هـ^{س}) ى س$
$= \frac{٢}{٣} هـ^{٣س} + ٢هـ^{٢س} + ٢هـ^{س} + ث$

١١ $\frac{١}{٢} هـ^{٢س} + ٢هـ^{س} - ٤هـ^{-س} + ث$

١٢ $\frac{١}{٣} هـ^{س^٣+١} + ث$

١٥ $٢ \int هـ^{\sqrt{م}} \times \frac{١}{٢\sqrt{م}} ى م = ٢هـ^{\sqrt{م}} + ث$

١٦ $\frac{٧}{٤} \int هـ^{-٢ص^٢} \times -٤ص ى ص = \frac{٧}{٤} هـ^{-٢ص^٢} + ث$

١٨ $س + لو_{هـ}|س| + ث$

١٨ $\frac{١}{٧} لو_{هـ}|س| + ث$

١٩ $\frac{١}{لو_{هـ} ٢} لو_{هـ}|س| + ث$

٢٢ $\frac{-١}{٧} لو_{هـ}|١ - ٧س| + ث$

٢٣ $لو_{هـ}|س^٣ - ١| + ث$

٢٤ $لو_{هـ}(س^٣ - ٥س + ١) + ث$

٢٥ $\int (\frac{٤}{س} + هـ^{س}) ى س = ٤ لو_{هـ}|س| + هـ^{س} + ث$

٢٦ $٤ لو_{هـ}|لو_{هـ} ٣س| + ث$

٢٨ $د(س) = \int ٢هـ^{-\frac{س}{٢}} ى س$

$د(س) = ٥ - ٤هـ^{-\frac{س}{٢}}$ ، $د(٣) \simeq ٤,١١$

## تمارين عامة

### اسئلة الاختيار

① د ② أ

③ جـ ④ د

⑤ $\text{لو}\,(\text{س} - ٣) = ٢$ ∴ $\text{س} - ٣ = ١٠٠$

∴ $\text{س} = ١٠٣$ ، م.ح $= \{١٠٣\}$

⑦ $\text{هـ}^{٥\text{س}+١} = ٢٠$ ∴ $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^{٥\text{س}+١} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,٢٠$

∴ $٥\text{س} + ١ = \text{لو}_{\text{هـ}}\,٢٠$ ∴ $\text{س} = \frac{١}{٥}\,[\text{لو}_{\text{هـ}}\,٢٠ - ١]$

$\text{س} \simeq ٠{,}٣٩٩$

⑨ $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^{\text{س}} = ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,٣$ ∴ $\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ} = ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,٣$

$\text{س} \simeq ٢{,}١٩٧$

⑩ $٧^{\text{س}} = ٢٥$ ∴ $\text{لو}_{\text{هـ}}\,٧^{\text{س}} = \text{لو}\,٢٥$

∴ $\text{س} = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\,٢٥}{\text{لو}_{\text{هـ}}\,٧}$ ، $\text{س} \simeq ١{,}٦٥$

م.ح $= \{١{,}٦٥\}$

⑬ $\lim_{\text{ن} \to \infty} (١ + \frac{٢}{\text{ن}})^{٣\text{ن}}$ بوضع $\frac{٢}{\text{ن}} = \text{س}$

$\text{ن} \to \infty$ ∴ $\text{س} \to ٠$

$\lim_{\text{س} \to ٠} (١ + \text{س})^{\frac{٦}{\text{س}}}$

$\lim_{\text{س} \to ٠} ((١ + \text{س})^{\frac{١}{\text{س}}})^{٦} = \text{هـ}^{٦}$

⑭ $\text{ص} = ٧\text{هـ}^{\text{س}} - ٣$ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٧\,\text{هـ}^{\text{س}}$

⑮ $\text{ص} = \text{هـ}^{٣\text{س}^٢+١}$ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٦\,\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}$

⑯ $\text{ص} = \text{س}^{١\text{س}}\,\text{هـ}^{-٣}$ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{هـ}^{-٣} \times ٢\text{س}$

⑰ $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,(\text{س}^٢ + ٣)$ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٢\text{س}}{\text{س}^٢ + ٣}$

⑲ $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,(\text{س}^٢ + ١)$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,(\text{س}^٢ + ١) + \text{هـ}^{\text{س}} \times \frac{٢\text{س}}{\text{س}^٢ + ١}$

$= \text{هـ}^{\text{س}}\,[\text{لو}_{\text{هـ}}\,(\text{س}^٢ + ١) + \frac{٢\text{س}}{\text{س}^٢ + ١}]$

## تمارين عامة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

① منحنى الدالة د حيث د(س) = $\text{هـ}^{\text{س}-٣} + ٢$ هو نفس منحنى ر(س) = $\text{هـ}^{\text{س}}$ بانتقال:

أ (٢ ، ٣) ب (٢ ، -٣) جـ (٣ ، -٢) د (٣ ، ٢)

② إذا كان د/(س) = س د(س) ، د(٣) = -٥ فإن: د//(٣) تساوى:

أ -٥٠ ب -٤٠ جـ ١٥ د ٢٧

③ $\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}^٢}{\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}}\,\text{ءس}$ تساوى:

أ $\frac{\text{س}}{٢}$ ب $\frac{١}{\text{س}}$ جـ ٢س د $\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}|$

④ $\int \frac{١}{\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}^٣}\,\text{ءس}$ تساوى:

أ $٣\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}|$ ب $٣\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}|$ جـ $\frac{١}{٣}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}|$ د $\frac{١}{٣}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}|$

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

⑤ $\text{لو}\,(\text{س} - ٣) = ٢$ ⑥ $\text{لو}\,(\text{س} + ٧) = ٥$ ⑦ $\text{هـ}^{٥\text{س}+١} = ٢٠$

⑧ $\text{لو}_{\text{هـ}}\,٤^{٢\text{س}-١} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,٥٠$ ⑨ $\text{لو}_{\text{هـ}}^{٢}\,\text{هـ}^{\text{س}} = ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,٣$ ⑩ $٧^{\text{س}} = ٢٥$

أوجد كلًا من النهايات التالية:

⑪ $\lim_{\text{س} \to \infty} (\frac{\text{ن}}{\text{ن}+١})^{\text{ن}}$ ⑫ $\lim_{\text{س} \to \infty} (\frac{٢\text{س}-١}{٢\text{س}+١})^{٢\text{س}}$ ⑬ $\lim_{\text{ن} \to \infty} (١ + \frac{٢}{\text{ن}})^{٣\text{ن}}$

أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ لكل من:

⑭ $\text{ص} = ٧\text{هـ}^{\text{س}} - ٣$ ⑮ $\text{ص} = \text{هـ}^{٣\text{س}^٢+١}$ ⑯ $\text{ص} = \text{س}^٢\,\text{هـ}^{-٣}$

⑰ $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,(\text{س}^٢ + ٣)$ ⑱ $\text{ص} = \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}^٢$ ⑲ $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,(\text{س}^٢ + ١)$

⑳ $\text{ص} = \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}} + ١}$ ㉑ $\text{ص} = \text{س}^٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^{\text{س}}$ ㉒ $\text{ص} = \frac{١}{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^{\text{س}}$

أوجد $\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ءس}^٢}$ لكل مما يأتى:

㉓ $\text{س} = \text{هـ}^{٢\text{ن}}$ ، $\text{ص} = \text{هـ}^{٣\text{ن}}$ ㉔ $\text{س} = \text{ن}^٣$ ، $\text{ص} = ٤\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ن}$

أوجد $\frac{\text{ء}^٣\text{ص}}{\text{ءس}^٣}$ لكل مما يأتى:

㉕ $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$ ㉖ $\text{ص} = \text{س}^٣ + \text{هـ}^{٢\text{س}}$ ㉗ $\text{ص} = \text{س}\,\text{لو}\,\text{س}$

كتاب الطالب – الصف الثالث الثانوى ٦١

⑳ $\text{ص} = \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}} + ١}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{(\text{هـ}^{\text{س}} + ١)\,\text{هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}^{\text{س}} \times \text{هـ}^{\text{س}}}{(\text{هـ}^{\text{س}} + ١)^٢} = \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{(\text{هـ}^{\text{س}} + ١)^٢}$

㉑ $\text{ص} = \text{س}^٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^{\text{س}} = \text{س}^٢ \times \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}$

$\text{ص} = \text{س}^٣$ ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣\text{س}^٢$

㉒ $\text{ص} = \frac{١}{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^{\text{س}} = \frac{١}{\text{س}} \times \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}$

$\text{ص} = ١$ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{صفر}$

㉕ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{\text{س}} = \text{س}^{-١}$

$\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ءس}^٢} = -\,\text{س}^{-٢}$

$\frac{\text{ء}^٣\text{ص}}{\text{ءس}^٣} = ٢\text{س}^{-٣} = \frac{٢}{\text{س}^٣}$

㉖ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣\text{س}^٢ + ٢\text{هـ}^{٢\text{س}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٦\text{س} + ٤\text{هـ}^{٢\text{س}}$

$\frac{\text{ء}^٣\text{ص}}{\text{ءس}^٣} = ٦ + ٨\text{هـ}^{٢\text{س}}$

٢٨ إذا كان $هـ^{س ص} = س^٢ + ص$ أثبت أن: $(س هـ^{س ص} - ١) ص' = ٢س - ص هـ^{س ص}$

٢٩ إذا كانت $س^٢ ص = أ ب لو_{هـ} س$ أثبت أن: $س^٢ ص'' + ٥س ص' + ٤ص = ٠$

**أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ لكل مما يأتى:**

٣٠ $ص = ٢^س (س + ١)$

٣١ $ص = ٣س^{س^٢ + ٣}$

٣٢ $ص = (١ - ٣س)^{جتاس}$

٣٣ $ص = \sqrt{\frac{(س + ١)(س + ٢)}{س^٣ + ٥}}$

**أوجد قيم س التى يكون عندها مماس المنحنى يوازى محور السينات حيث س > ٠**

٣٤ $ص = س^٣ لو_{هـ} س$

٣٥ $ص = \frac{١}{س^٢} لو_{هـ} س^٢$

٣٦ $ص = س^٣ - ٨١ لو_{هـ} س$

٣٧ $ص = ٣ - \frac{س^٢}{٤} + لو_{هـ} \frac{س}{٢}$

٣٨ إذا كان $س هـ^{-\frac{١}{٢}ص} + ص هـ^{-\frac{س}{٢}} = ٢$ أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ عند س = ٠

**أوجد كلًّا من التكاملات الآتية:**

٣٩ $\int (س + \frac{١}{س^٢})^٢ ءس$

٤٠ $\int \frac{٣س^٤ + ٤س}{س^٢}$

٤١ $\int \frac{لو_{هـ} هـ^س}{س^٢ لو_{هـ} س} ءس$

٤٢ $\int \frac{٦س + ٩}{س^٢ + ٣س} ءس$

٤٣ $\int \frac{لو_{هـ} س}{س لو_{هـ} \sqrt{س}} ءس$

٤٤ $\int (س + ٢)(٣س - \frac{١}{س}) ءس$

٤٥ $\int (\frac{٣}{س} + ٤هـ^{-٢س}) ءس$

٤٦ $\int (\frac{هـ^٣}{س} + س لو_{هـ} ٣) ءس$

٤٧ $\int (س^٣ - \frac{٢}{٣} هـ^س) ءس$

٤٨ **معدل النمو السكانى:** إذا كان عدد سكان إحدى المدن الجديدة يُعطى بالعلاقة $ع = ١٠^٤ هـ^{رن}$ نسمة بدلالة عدد السنوات بعد سنة ٢٠١٠ ، ر معدل النمو السكانى.

أ إحسب عدد السكان فى سنه ٢٠١٠.

ب إذا كان عدد سكان المدينة ١٥٠٠٠ نسمة سنه ٢٠١٥ احسب معدل النمو السكانى.

ج إذا استمر معدل النمو السكانى على هذا النحو كم تتوقع أن يكون عدد سكان المدينة سنه ٢٠٣٠.

٤٩ **التقاطع مع المحور:** إذا كان مماس المنحنى $ص = هـ^س$ عند النقطة $(٢ ، هـ^٢)$ يقطع محور السينات فى النقطة أ ، ومحور الصادات فى النقطة ب ، أوجد طول $\overline{أب}$

٥٠ **معادلتا المماس والعمودى:** أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى $ص = س^٣ - ١٨ لو_{هـ} س$ عند نقطة تقع عليه و إحداثيها السينى يساوى ٢.

٥١ **التناسب العكسى:** إذا كان ميل المماس عند أى نقطة (س ، ص) على منحنى الدالة د يتناسب عكسيًّا مع س وكان ميل المماس يساوى ٢ عند س = ٤ ، ص = ٢ أوجد ص بدلالة س.

٥٢ **التوازى:** أوجد قيم س (لأقرب رقمين عشريين) التى يكون عندها مماس المنحنى $ص = \frac{١}{س^٢} لو_{هـ} س^٢$ موازيًا لمحور السينات.

٦٢ كتاب الرياضيات البحتة - التفاضل والتكامل

**٢٧** $ص = س لو س$

$$\therefore \frac{ءص}{ءس} = لو س + س \times \frac{١}{س لو_{هـ} ١٠}$$

$$\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = \frac{١}{س لو_{هـ} ١٠} + صفر = \frac{١}{لو_{هـ} ١٠} \times \frac{١}{س}$$

$$\therefore \frac{ء^٣ص}{ءس^٣} = \frac{-١}{س^٢} \times \frac{١}{لو_{هـ} ١٠}$$

**٢٨** $هـ^{س ص} = س^٢ + ص$

$$هـ^{س ص} (١ \times ص + س \frac{ءص}{ءس}) = ٢س + \frac{ءص}{ءس}$$

$$ص هـ^{س ص} + س هـ^{س ص} \frac{ءص}{ءس} = ٢س + \frac{ءص}{ءس}$$

$$(س هـ^{س ص} - ١) \frac{ءص}{ءس} = ٢س - ص هـ^{س ص}$$

**٣٠** $\frac{ءص}{ءس} = ٢^س لو_{هـ} ٢ (س + ١) + ٢^س$

$$= ٢^س [ ١ + (س + ١) لو_{هـ} ٢ ]$$

**٣١** بأخذ لو للطرفين

$$لو_{هـ} ص = لو_{هـ} ٣س^{س^٢ + ٣}$$

$$\therefore لو_{هـ} ص = (س^٢ + ٣)(لو_{هـ} ٣س)$$

$$\frac{١}{ص} \times \frac{ءص}{ءس} = ٢س لو_{هـ} ٣س + (س^٢ + ٣) \times \frac{١}{٣س} \times ٣$$

$$\frac{١}{ص} ص' = ٢س لو_{هـ} ٣س + \frac{١}{س} (س^٢ + ٣)$$

$$ص' = ٢س ص لو_{هـ} ٣س + ص (س + \frac{٣}{س})$$

**٣٣** $ص = (\frac{(س + ١)(س + ٢)}{س^٣ + ٥})^{\frac{١}{٢}} = (\frac{س^٢ + ٣س + ٢}{س^٣ + ٥})^{\frac{١}{٢}}$

$$ص' = \frac{١}{٢} (\frac{س^٢ + ٣س + ٢}{س^٣ + ٥})^{-\frac{١}{٢}} \times (\frac{(س^٣ + ٥)(٢س + ٣) - (س^٢ + ٣س + ٢)(٣س^٢)}{س^٣ + ٥})$$

$$= \frac{١}{٢} (\frac{س^٢ + ٣س + ٢}{س^٣ + ٥})^{-\frac{١}{٢}} \times \frac{٢س^٤ + ٣س^٣ + ١٠س + ١٥ - ٣س^٤ - ٩س^٣ - ٦س^٢}{(س^٣ + ٥)^٢}$$

$$= \frac{١}{٢} (\frac{س^٢ + ٣س + ٢}{س^٣ + ٥})^{-\frac{١}{٢}} \times \frac{-س^٤ - ٦س^٣ - ٦س^٢ + ١٠س + ١٥}{(س^٣ + ٥)^٢}$$

**٣٥** $ص = \frac{١}{س^٢} لو_{هـ} س^٢$

$$\therefore ص' = \frac{١}{س^٢} \times \frac{٢س}{س^٢} + \frac{-٢}{س^٣} لو_{هـ} س^٢$$

$ص' = \frac{٢}{س^٣} - \frac{٢}{س^٣} لو_{هـ} س^٢$ بوضع ص' = ٠

$\frac{٢}{س^٣} (١ - لو_{هـ} س^٢) = ٠$ $\therefore لو_{هـ} س^٢ = ١$

$س^٢ = هـ^١$ $س = \sqrt{هـ}$

$ص = \frac{١}{هـ} لو_{هـ} هـ = \frac{١}{هـ}$ ∴ النقطة $(\sqrt{هـ} ، \frac{١}{هـ})$

**٣٦** $ص = س^٣ - ٨١ لو_{هـ} س$

$ص' = ٣س^٢ - ٨١ \times \frac{١}{س}$ $\therefore \frac{١}{س} (٣س^٣ - ٨١) = ٠$

$س = ٣$ $\therefore ص = ٢٧ - ٨١ لو_{هـ} ٣$

النقطة $(٣ ، ٢٧ - ٨١ لو_{هـ} ٣)$

**٣٨** $س هـ^{\frac{-ص}{٢}} + ص هـ^{\frac{-س}{٢}} = ٢$

$$١ \times هـ^{\frac{-ص}{٢}} + س \times هـ^{-\frac{١}{٢}ص} \times -\frac{١}{٢} ص' + ص' هـ^{-\frac{١}{٢}س} + ص هـ^{-\frac{١}{٢}س} \times -\frac{١}{٢} = صفر$$

بوضع س = صفر

$هـ^{-\frac{1}{2}ص} + صَ + ص \times -\frac{1}{2} = صفر$

$صَ = \frac{1}{2} ص - هـ^{-\frac{1}{2}ص}$

(٤٠) $\int (٣س^٢ + \frac{٤}{س}) ءس = س^٣ + ٤ لو_{هـ} |س| + ث$

(٤١) $\int \frac{س}{س^٢ لو_{هـ} س} ءس = \int \frac{\frac{١}{س}}{لو_{هـ} س} ءس$

$= لو_{هـ} | لو_{هـ} |س| | + ث$

(٤٢) $\int \frac{٩ + ٦س}{س^٢ + ٣س} ءس = ٣ لو_{هـ} |س^٢ + ٣س| + ث$

(٤٤) $\int (٣س^٢ - ١ + ٦س - \frac{٢}{س}) ءس$

$س^٣ - س + ٣س^٢ - ٢ لو_{هـ} |س| + ث$

(٤٥) $\int (\frac{٣}{س} + ٤ هـ^{-٢س}) ءس = ٣ لو_{هـ} |س| - ٢هـ^{-٢س} + ث$

(٤٦) $\int (\frac{هـ^٣}{س} + س لو_{هـ} ٣) ءس$

$= هـ^٣ لو_{هـ} |س| + \frac{١}{٢} س^٢ لو_{هـ} ٣ + ث$

(٤٧) $\int (س^٣ - \frac{٢}{٣} هـ^س) ءس = \frac{١}{٤} س^٤ - \frac{٢}{٣} هـ^س + ث$

(٤٩) $\because ص = هـ^س \qquad \therefore صَ = هـ^س$

$\therefore صَ_{(٢، هـ^٢)} = هـ^٢$

معادلة المماس $ص - هـ^٢ = هـ^٢ (س - ٢)$

نقطة تقاطع المماس مع محور السينات

هى: أ $(١ ، ٠)$

نقطة تقاطع المماس مع محور الصادات

هى: ب $(٠ ، -هـ^٢)$

$\therefore أب = \sqrt{١ + هـ^٢}$

(٥١) $\because صَ = \frac{أ}{س} \qquad \because ٢ = \frac{أ}{٤}$

$\therefore أ = ٨ \qquad صَ = \frac{٨}{س}$

$ص = \int \frac{٨}{س} ءس = ٨ لو_{هـ} |س| + ث$

$ص = ٨ لو_{هـ} |س| + ث$

$٢ = ٨ لو_{هـ} ٤ + ث \qquad \therefore ث = ٢ - ٨ لو_{هـ} ٤$

$\therefore ص = ٨ لو_{هـ} |س| + ٢ - ٨ لو_{هـ} ٤$

## اختبار تراكمي

**اختر الإجابات الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:**

(١) $\lim_{س \to \infty} (١ + \frac{١}{س})^{٢س}$ تساوى:

أ $١$ ب $هـ$ جـ $هـ^٢$ د $هـ^{-٢}$

(٢) $م = ٧^{لو_{هـ} ٧}$ فإن م تساوى:

أ $١$ ب $\frac{١}{هـ}$ جـ $هـ$ د $٧$

(٣) مجموعة حل المعادلة $لو_{هـ}(س - ٣) + لو_{هـ}(س - ٢) = لو_{هـ} ٦$ هى:

أ $\{٠ ، ٥\}$ ب $\{٥\}$ جـ $\{٢ ، ٣\}$ د $\phi$

(٤) إذا كانت $د(س) = س^٢ - ٣ لو_{هـ} ٥س$ فإن $دَ(٢)$ تساوى:

أ $-١$ ب $١$ جـ $\frac{٥}{٢}$ د $٦$

**أجب عن الأسئلة الآتية:**

(٥) أوجد المشتقة الأولى لكل من:

أ $ص = (س^٣ + ١)^٢$ ب $ص = لو_{هـ} س^٢ - هـ^{\frac{١}{٤}س}$ جـ $ص = لو_{هـ} [\frac{هـ^{س^٢}}{س^٢}]$

(٦) إذا كانت $ص = هـ^{٣س} + س^٢$ أثبت أن: $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} - ٢ = ٩ (ص - س^٢)$

(٧) أوجد كلًّا من التكاملات الآتية:

أ $\int \frac{٢س^٢ + ٣}{س} ءس$ ب $\int \frac{ءس}{\sqrt{س} هـ^{\sqrt{س}}}$ جـ $\int \frac{٣}{٢س لو_{هـ} س} ءس$

(٨) تُعطى العلاقة $ء = ٦٠ + ٣٠هـ^{-٠,١٢ن}$ درجة حرارة مشروب ساخن (°c) بعد زمن قدره ن (ثانية) من لحظة إعداده.

أ أوجد درجة حرارة المشروب عند إعداده. ب أوجد درجة حرارة المشروب بعد ١٠ دقائق.

جـ متى تصبح درجة حرارة المشروب ٦٣°c ؟

(٩) إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أى نقطة عليه (س ، ص) يساوى $٧ - ٢ هـ^س$ وكان $د(لو_{هـ} ٢) = ٣$ ، أوجد د(س).

**إذا لم تستطع الإجابة عن أحد هذه الأسئلة يمكنك الاستعانة بالجدول الآتى:**

| رقم السؤال | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ | ٧ | ٨ | ٩ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| أرجع إلى | ١ | ١ | ١ | ٢ | ٢ | ٢ | ٣ | ١ | ٣ |

كتاب الطالب – الصف الثالث الثانوى ٦٣

## اختبار تراكمى

### اسئلة الاختبار

(١) جـ (٢) د

(٣) أ (٤) جـ

(٥)

أ $صَ = ٢(س^٣ + ١)^٢ \times ٣ س^٢$

$= ٦س^٢ (س^٣ + ١)^٢$

ب $صَ = \frac{٢}{س} - هـ^{\frac{١}{٤}س} \times \frac{١}{٤} = \frac{٢}{س} - \frac{١}{٤} هـ^{\frac{١}{٤}س}$

جـ $صَ = \frac{س^٢}{هـ^{س^٢}} \times \frac{س^٢ \times هـ^{س^٢} \times ٢س - هـ^{س^٢} \times ٢س}{س^٤}$

$= \frac{٢س هـ^{س^٢} [س^٢ - ١]}{هـ^{س^٢} \times س^٢} = \frac{٢ [س^٢ - ١]}{س}$

(٦) $\because ص = هـ^{٣س} + س^٢ \qquad صَ = ٣هـ^{٣س} + ٢س$

$صً = ٩هـ^{٣س} + ٢ \qquad صً - ٢ = ٩هـ^{٣س}$

$صً - ٢ = ٩ (ص - س^٢)$

(٧)

أ $\int (٢س + \frac{٣}{س}) ى س = س^٢ + ٣ لو_هـ |س| + ث$

ب $\int \frac{ى س}{\sqrt{س} هـ^{\sqrt{س}}} = ٢ \int \frac{١}{هـ^{\sqrt{س}}} \times \frac{١}{٢\sqrt{س}} ى س$

$= ٢$ لو

جـ $\int \frac{\frac{٣}{٢} \times \frac{١}{س}}{لو_هـ س} = ى س = \frac{٣}{٢}$ لو $|لو_هـ س| + ث$

٨ أ عند ن = ٠

$\therefore ى = ٦٠ + ٣٠ = ٩٠°$

ب عند ن = ١٠

$\therefore ى = ٦٠ + ٣٠ هـ^{-١,٢} \simeq ٦٩°$

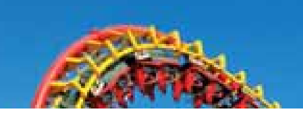
جـ عندما ى = ٦٣°

$\therefore ٦٣ = ٦٠ + ٣٠ هـ^{-٠,١٢ ن}$

$هـ^{-٠,١٢ ن} = ٠,١$

$-٠,١٢ ن = لو_هـ ٠,١$

$\therefore ن \simeq ١٩$ دقيقة



# الوحدة الثالثة

## سلوك الدالة ورسم المنحنيات

## Bhavior of the Function and Curve Sketching



الوحدة الثالثة

سلوك الدالة ورسم المنحنيات

Behavior of the Function and Curve Sketching

**مقدمة الوحدة**

يمكنك من خلال قراءة الشكل البيانى لمنحنى دالة أن تحدد فترات اضطرادها (تزايد - تناقص- ثبات) كما يمكن معرفة القيم العظمى والقيم الصغرى للدالة والتعرف على بعض خواص الدالة، كما تستطيع باستخدام البرامج الرسومية للحاسب الآلى رسم الدالة ودراسة سلوكها... إلا أن هذا ليس متاحًا دائما، لذلك ستعرف فى هذه الوحدة تقنيات أكبر لرسم منحنى الدالة من خلال حساب التفاضل باستخدام مشتقات الدالة (المشتقة الأولى والمشتقة الثانية) لتحديد فترات تزايد أو تناقص الدالة، وتعيين القيم العظمى والقيم الصغرى المرتبطة بقيم س (القيم العظمى والصغرى المحلية)، والقيم العظمى والصغرى المطلقة لدالة متصلة على فترة محددة [أ ، ب] واتجاه تحدب منحنى الدالة (لأعلى أو لأسفل) كما تدرس بعض التطبيقات لايجاد القيم العظمى والصغرى لتساعدك فى نمذجة وحل مشكلات رياضية وفيزيائية وحياتية أخرى.

**أهداف الوحدة**

**فى نهاية هذه الوحدة وبعد تنفيذ الأنشطة فيها، من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:**

- يستخدم المشتقة الأولى لدراسة تزايد وتناقص الدالة القابلة للاشتقاق.
- يحدد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة القابلة للاشتقاق.
- يتعرف ويوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة لدالة فى فترة مغلقة.
- يوجد النقط الحرجة والتحدب لأعلى والتحدب لأسفل ونقط الانقلاب لدالةٍ.
- يوجد العلاقة بين منحنى الدالة والمشتقة الأولى.
- يدرس سلوك دالة من حيث الاضطراد والقيم العظمى والصغرى من خلال المشتقة الأولى.
- يرسم المنحنيات لدوال كثيرة الحدود حتى الدرجة الثالثة فقط.

كتاب الرياضيات البحتة - التفاضل والتكامل

### مقدمة الوحدة

سوف يدرس الطالب في هذه الوحدة فترات التزايد والتناقص للدالة القابلة للأشتقاق و يحدد القيم العظمى والصغرى المحلية لها و يتعرف على القيم العظمى والصغرى المطلقة في فترة مغلقة ثم يحدد مناطق التحدب لأعلى ولأسفل و يوجد نقط الأنقلاب للدالة إن وجدت ثم يقوم برسم منحنى تقريبي للدالة موضحًا علية ما تم ذكره سابقًا وفي نهاية الدرس سيقوم يحل تطبيقات حياتية على القيم العظمى والصغرى المطلقة.

### مخرجات التعلم:

**فى نهاية الوحدة وتنفيذ الأنشطة فيها من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:**

- تؤخذ نصًا (كربي) من كتاب الطالب ص ٦٤

### دورس الوحدة

- تزايد وتناقص الدوال
- القيم العظمى والصغرى (القيم القصوى)
- رسم المنحنيات
- تطبيقات على القيم العظمى والصغرى

### زمن تدريس الوحدة

(٧) حصص

### مهارات التفكير التي تنميها الوحدة

- التفكير الناقد - التفكير الإبداعي - التفكير التحليلي - حل المشكلات.

### الوسائل التعليمية المستخدمة

السبورة التعليمية - سبورة مربعات - طباشير ملون - آلة حاسبة علمية - حاسب آلي - مزود ببرامج رسومية geogobra

## طرق التدريس المقترحة

العرض المباشر - المناقشة - العصف الذهنى - الطريقة الأستنباطية - التعلم التعاوني - حل المشكلات.

## طرق التقييم المقترحة

يتمثل في الأسئلة الشفهية والتحريرية الفردية والجماعية أثناء الدرس وبعد الدرس، والأنشطة المقترحة وسلم النشاط الخاص بكل منها والتكاليف الجماعية والفردية وتدريبات عامة على الوحدة.

## المخطط التنظيمي للوحدة

**ويتناول الآتى:**

- بحث سلوك الدالة بدراسة اختبار المشتقة الأول الذى يؤدى إلى دراسة فترات التزايد والتناقص ، ثم اختبار المشتقة الثانية الذي يؤدى إلى تحديد القيم العظمى والصغرى المحلية(مصافًا إلى ذلك اختيار د(ر))
- دراسة القيم العظمى المطلقة ثم تطبيقات عليها تتناول تطبيقات (هندسية، فيزيائية، اقتصادية، حياتية) ومن جانب آخر رسم المنحنيات ويتطلب التعرف على تحديد القيم العظمى والصغرى وبالتالي نقط الأنقلاب



### المصطلحات الأساسية

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| دالة متزايدة | Increasing Function | قيمة صغرى محلية | Local Minimum | التحدب | Convexity |
| دالة متناقصة | Dereasing Functicn | قيمة عظمى محلية | Local Maximum | تحدب لأعلى | Convex Upward |
| القيم العظمى والصغرى | Maxima and Minima | قيمة قصوى محلية | Local Extrema | تحدب لأسفل | Convex Downward |
| القيم القصوى | Extrema | قيمة قصوى مطلقة | Absalute Extrema | نقطة انقلاب | Infection Point |
| نقطة حرجة | Critical Point | | | | |

### دروس الوحدة

الدرس (٣ - ١): تزايد وتناقص الدوال.
الدرس (٣ - ٢): القيم العظمى والصغرى ( القيم القصوى )
الدرس (٣ - ٣): رسم المنحنيات
الدرس (٣ - ٤): تطبيقات على القيم العظمى والصغرى

### الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسب الآلي

### مخطط تنظيمى للوحدة

# ٣ - ١

# تزايد وتناقص الدوال

## Increasing and Decreasing Functions



# ٣ - ١ تزايد وتناقص الدوال

Increasing and Decreasing Functions

**سوف تتعلم**

- استخدام المشتقة الأولى فى تحديد فترات تزايد أو تناقص دالة.
- تطبيقات حياتية على فترات تزايد وتناقص الدالة.

**المصطلحات الأساسية**

- دالة متزايدة *Increasing Function*
- دالة متناقصة *Decreasing Function*

**الأدوات المستخدمة**

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسب

### فكر و ناقش

توضح الأشكال المقابلة منحنيى الدالتين د ، ر حيث

د (س) = س^٢ - ٢س - ١ ،

ر (س) = س^٣ - ٣س

- حدد فترات تزايد أو تناقص الدالة د
- أوجد مشتقة الدالة د وابحث إشارة دَ (س) لقيم س المختلفة التى تنتمى لفترة التزايد
- إبحث إشارة دَ (س) لقيم س المختلفة التى تنتمى لفترة التناقص



كرر ما سبق من خطوات لتحديد إشارة رَ (س) فى فترات التزايد وفترات التناقص للدالة ر، ماذا تستنتج؟ وما نوع الزاوية التى يصنعها مماس المنحنى عند قيم س المختلفة فى فترات التزايد مع الاتجاه الموجب لمحور السينات؟

### تعلم

**اختبار المشتقة الأولى لاضطراد الدوال**

*First Derivative Test for Monotonic Functions*

**نظرية**

لتكن د دالة قابلة للاشتقاق على الفترة ] أ ، ب [ :

١- اذا كان دَ(س) > ٠ لجميع قيم س ∈ ] أ ، ب[ فإن د متزايدة على الفترة ] أ ، ب [

٢- إذا كان دَ(س) < ٠ لجميع القيم س ∈ ] أ ، ب [ فإن د متناقصة على الفترة ] أ ، ب [

**بحث اضطراد دالة**



٦٦ كتاب الرياضيات البحتة - التفاضل والتكامل

## خلفية

يستخدم الطالب فى هذا الدرس المشتقة الأول للدالة في تحديد فترات التزايد والتناقص للدوال الجبرية والدوال المثلثية، كما يمكن إيجاد حل لبعض المعادلات التي يتقاطع فيها منحنى دوالها الجبرية مع محور السينات.

## مخرجات تعلم الدرس

**في نهاية الدرس وتنفيذ الأنشطة فيه من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن.**

١- يستخدام المشتقة الأولى في تحديد فترات التزايد أو التناقص للدالة.

٢- يحل تطبيقات حياتية على فترات التزايد والتناقص.

## مفردات أساسية

دالة متزايدة - دالة متناقصة

## المواد التعليمية المستخدمة

السبورة التعليمية - طباشير ملون - آلة حاسب علمية - برامج رسومية للحاسوب.

## مكان التدريس:

الفصل الدراسى.

## مصادر التعلم

كتاب الطالب من ص (٦٦) إلى ص (٦٩).

## تهيئة

اطلب إلى الطلاب قراءة بند فكر وناقش. ص (٦٨) واطلب إليهم الإجابة على الأسئلة الخاصة بهذا البند

## إجراءات الدرس:

**في بند تعلم أشر إلى الطلاب بأن:**

تكون الدالة تزايدية على الفترة ] أ ، ب [ إذا كان دَ (س) > ٠ لجميع قيم س ∈ ] أ ، ب [

وتكون الدالة دَ (س) < ٠ تناقصية على الفترة ] أ ، ب[ إذا كان دَ(س) < ٠ لجميع قيم س ∈ ] أ ، ب [

## التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

### ١- حاول أن تحل ١

**أ** د (س) = س$^{٣}$ - ٩ س$^{٢}$ + ١٥ س المجال

د́(س) = ٣ س$^{٢}$ - ١٨ س + ١٥

= ٣ (س - ٥) (س - ١)

د (س) = صفر ∴ س = ٥ أو ١

د متزايدة على الفترة ] -∞ ، ١ [

د متناقصة على الفترة ] ١ ، ٥ [

د متزايدة على الفترة ] ١ ، ∞ [

**ب** ر́(س) = $\frac{س}{س^{٢} + ١}$ المجال ع

ر́(س) = $\frac{س^{٢} + ١ - س \times ٢س}{(س^{٢} + ١)^{٢}}$

ر́(س) = $\frac{١ - س^{٢}}{(س^{٢} + ١)^{٢}}$ = صفر

س = ± ١

ر (س) = متناقصة على ] -∞ ، -١ [

ومتزايدة في ] -١ ، ١ [ ، متناقصة على ] ١ ، ∞ [

### ٢-

د (س) = س - ٢ جتا س ، ٠ < س < ٢ $\pi$

د́(س) = ١ + ٢ جا س = صفر

جا س = $\frac{-١}{٢}$

س = $\frac{٧\pi}{٦}$ أو س = $\frac{١١\pi}{٦}$

د تزايدية على كل من : ] ٠ ، $\frac{٧\pi}{٦}$ [ ، ] $\frac{١١}{٦}\pi$ ، ٢$\pi$ [

تناقصية على ] $\frac{٧\pi}{٦}$ ، $\frac{١١}{٦}\pi$ [

### ٣-

د(س) = س - هـ$^{س}$ مجالها ] -∞ ، ∞ [

د́(س) = ١ - هـ$^{س}$ = صفر

هـ$^{س}$ = ١

### الدالة متزايدة على ع

دالة الدخل د = عدد الوحدات المباعة × دالة الطلب

∴ د(س) = س(١٤٠ - ٢س)

= ١٤٠ س - ٢س$^{٢}$

---



**مثال** تحديد فترات التزايد والتناقص

① حدد فترات التزايد وفترات التناقص الدالة د حيث د (س) = س$^{٣}$ - ٣س + ٢

**الحل**

∵ د(س) = س$^{٣}$ - ٣س + ٢ دالة متصلة وقابلة للاشتقاق على ع

∴ د́(س) = ٣س$^{٢}$ - ٣ = ٣ (س$^{٢}$ - ١)

بوضع د́(س) = ٠ فيكون: ٣ (س$^{٢}$ - ١) = ٣ (س - ١) (س + ١) = ٠

∴ س = -١ ، س = ١ يجزّأ مجال الدالة د إلى ٣ فترات

نبحث إشارة د́(س) فى كل من هذه الفترات كما فى جدول التغيرات التالى فنجد:

د متزايدة علي الفترة ] -∞ ، -١ [

د متناقصة على الفترة ] -١ ، ١ [

د متزايدة على الفترة ] ١ ، ∞ [

| س | -∞ | -١ | | ١ | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د́(س) | + | ٠ | − | ٠ | + |
| سلوك د (س) | ↗ | | ↘ | | ↗ |

**لاحظ أن:**

١) عند رسم منحنى الدالة د بأحد البرامج الرسومية (الشكل المقابل) نجد أن سلوك منحنى الدالة يطابق ما تم استنتاجه بجدول التغيرات.

٢) المماس للمنحنى يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فى فترات التزايد وزاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فى فترات التناقص.

٢) قيم س التى تفصل بيت فترات التزايد والتناقص للدالة هى القيم التى تكون عندها المشتقة الأولى للدالة تساوى صفرًا أو غير موجودة

**حاول أن تحل**

① حدد فترات التزايد وفترات التناقص لكل مما يأتى:

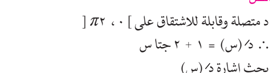
أ د (س) = س$^{٣}$ - ٩س$^{٢}$ + ١٥س ب ر(س) = $\frac{س}{س^{٢}+١}$



**مثال** دوال مثلثية

② حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة د حيث د (س) = س + ٢جا س ، ٠ < س < ٢$\pi$

**الحل**



د متصلة وقابلة للاشتقاق على ] ٠ ، ٢$\pi$ [

∴ د́(س) = ١ + ٢ جتا س

بحث إشارة د́(س)

عندما ١ + ٢ جتاس = ٠ ∴ جتاس = -$\frac{١}{٢}$

∵ س ∋ ] ٠ ، ٢$\pi$ [ ∴ س = $\frac{٢\pi}{٣}$ أو س = $\frac{٤\pi}{٣}$

| س | -∞ | $\frac{٢\pi}{٣}$ | | $\frac{٤\pi}{٣}$ | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د́(س) | + | ٠ | − | ٠ | + |
| سلوك د (س) | ↗ | | ↘ | | ↗ |







**لاحظ أن:**

عند س = $\frac{\pi}{٢}$ د́(س) = ١ > ٠ ∴ د تزايدية على ] ٠ ، $\frac{٢\pi}{٣}$ [

عند س = $\pi$ د́(س) = -١ < ٠ ∴ د متناقصة على ] $\frac{٢\pi}{٣}$ ، $\frac{٤\pi}{٣}$ [

عند س = $\frac{٣\pi}{٢}$ د́(س) = ١ > ٠ ∴ د تزايدية على ] $\frac{٤\pi}{٣}$ ، ٢$\pi$ [

**حاول أن تحل**

② حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة د حيث د(س) = س - ٢ جتا س ، ٠ < س < ٢$\pi$

**تفكير ناقد:** يوضح الشكل المقابل منحنى د́(س) للدالة د حيث د (س) كثيرة الحدود.

أ عين فترات التزايد وفترات التناقص للدالة د

ب أوجد مجموعة حل المتباينة د́́(س) > ٠

**الدالة اللوغاريتمية**

**مثال**

③ حدد فترات تزايد وفترات تناقص الدالة ر حيث ر (س) = ٢لو$_{هـ}$ س - س$^{٢}$

**الحل**

ر (س) قابلة للاشتقاق لكل س ∋ ع$^{+}$

ر́(س) = $\frac{٢}{س}$ -٢س = $\frac{٢(١ - س^{٢})}{س}$

بحث إشارة ر́(س)

عندما ر́(س) = ٠ ∴ س = ١ أو س = -١ ∌ ع$^{+}$

عند س < ١ ∴ ر́(س) > ٠ وتكون ر تزايدية على ] ٠ ، ١ [

عند س > ١ ∴ ر́(س) < ٠ وتكون ر تناقصية على ] ١، ∞[

| س | ٠ | ١ | ∞ |
|---|---|---|---|
| إشارة د́(س) | + | ٠ | − |
| سلوك د (س) | ↗ | | ↘ |

**حاول أن تحل**

③ حدد فترات تزايد وفترات تناقص الدالة د حيث د (س) = س - هـ$^{س}$ ، وباستخدام برنامج GeoGebra ارسم منحنى الدالة د وتحقق من إجابتك.

**مثال**

④ تطبيقات إقتصادية: إذا كانت ك دالة التكاليف لإنتاج س وحدة بأحد المصانع حيث ك (س) = ٣٠٠ + ٢٠س ودالة الطلب ص = ١٠٠ - س حدد متى تتزايد ومتى تتناقص كل من دالة التكاليف ودالة الإيراد ودالة الربح.

**الحل**

دالة التكاليف ك:

∵ ك (س) = ٣٠٠ + ٢٠س ∴ ك́(س) = ٢٠ > ٠

تزايد وتناقص الدوال ٣ - ١

| س | ٠ | -∞ |
|---|---|---|
| إشارة د′(س) | + | ٠ |
| سلوك د (س) | ↗ | ↘ |

تتزايد تكاليف إنتاج س وحدة بزيادة عدد الوحدات المنتجة

دالة الدخل د : د (س) = ر(١٠٠ - س) = ١٠٠س - س$^{٢}$

∴ د′(س) = ١٠٠ - ٢س ، د′(س) = ٠ عند س = ٥٠

يتزايد الدخل عند بيع أقل من ٥٠ وحدة، و يتناقص عند بيع أكثر من ٥٠ وحدة.

دالة الربح: ر(س) = د(س) - ك (س)

= ١٠٠س - س$^{٢}$ - ٣٠٠ - ٢٠س = - س$^{٢}$ + ٨٠ س - ٣٠٠

| س | ٠ | ٤٠ | |
|---|---|---|---|
| إشارة د′(س) | + | ٠ | – |
| سلوك د (س) | ↗ | | ↘ |

ر′(س) = -٢س + ٨٠

ر′(س) = ٠ عند س = ٤٠

يتزايد الربح عند بيع أقل من ٤٠ وحدة، و يتناقص عند بيع أكثر من ٤٠ وحدة

**حاول أن تحل**

٤ فى المثال السابق إذا كانت دالة الطلب ص = ١٤٠ - ٢س، ناقش تزايد وتناقص كل من دالة الدخل ودالة الربح.

**تمـــارين ٣ – ١**

**حدد فترات تزايد وفترات تناقص الدالة د فى كل مما يأتى:**

١ د (س) = س$^{٢}$ - ٤س ٢ د (س) = (س-٣)$^{٢}$ ٣ د (س) = س$^{٣}$ - ٦س$^{٢}$ + ٥

٤ د (س) = ٩س - س$^{٣}$ ٥ د (س) = س$^{٤}$ + ٤س ٦ د (س) = ٢ - ٣ (س-٢)$^{\frac{٤}{٣}}$

٧ د (س) = ١ - $\frac{١}{\text{س}}$ ٨ د (س) = $\frac{\text{س} - ٢}{\text{س} + ٢}$ ٩ د (س) = $\frac{\sqrt{\text{س}-١}}{\text{س}}$

١٠ د (س) = س + لو$_{هـ}$ س ١١ د (س) = ٣ - لو$_{هـ}$ س$^{٢}$ ١٢ د (س) = ٥ - ٢ هـ$^{٢س}$

**أجب عما يأتى:**

١٣ أثبت أن الدالة د حيث د (س) = ظا س - س متزايدة على الفترة ] ٠ ، $\frac{\pi}{٤}$ [

١٤ حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة د حيث د(س) = ١ - جاس ، ٠ < س < ٢ $\pi$

١٥ إذا كانت د ، ر دالتين قابلتين للاشتقاق ، د′(س) < ر′ (س) لكل س ∈ع ، فأثبت أن الدالة ع حيث ع (س) = د (س) - ر(س) متناقصة لكل س ∈ ع.

١٦ تطبيقات اقتصادية: إذا كان تكاليف إنتاج س من الوحدات لمنتج ما يُعطى بالعلاقة:
ك (س) = ٢٧٥٠٠ + ١٨س - ١٢س$^{٢}$ + ٢س$^{٣}$ حيث س مقدرًا بالآلاف، عند أى مستوى إنتاج يكون هامش التكلفة متناقصًا.

كتاب الطالب – الصف الثالث الثانوى ٦٩

د′(س) = ١٤٠ - ٤ س

عند د′(س) = ٠ ∴ س = $\frac{١٤٠}{٤}$ = ٣٥

يتزايد الدخل عند بيع أقل من ٣٥ وحده و يتناقص عند بيع أكثر من ٣٥ وحده

دالة الربح = ر (س) = د(س) - ك (س)

ر′(س) = ١٤٠ س - ٢ س$^{٢}$ - ٣٠٠ - ٢٠ س

= -٢ س$^{٢}$ + ١٢٠ س - ٣٠٠

ر′(س) = -٤ س + ١٢٠ = صفر

س = ٣٠

يتزايد الربح عن بيع أقل من ٣٠ و يتناقص عند بيع أكثر من ٣٠

## حلول تمارين (٣-١)

١ المسائل من ١ ⟵ ٥ دوال كثيرات الحدود

٥ د(س) = س$^{٤}$ + ٤ س

دَ(س) = ٤ س$^{٣}$ + ٤ = ٤ (س$^{٣}$ + ١) = صفر

س = -١

متناقصة على ]-∞ ، -١ [

متزايدة على ]-١ ، ∞ [

٦ د(س) = ٢ - ٣ (س - ٢)$^{\frac{٤}{٣}}$

= ٠ - ٣ × $\frac{٤}{٣}$ (س - ٢)$^{\frac{١}{٣}}$ × ١

= -٤ (س - ٢)$^{\frac{١}{٣}}$ = صفر س = ٢

متزايدة على ]-∞ ، ٢[

متناقصة على ]٢ ، ∞[

٧ د (س) = ١ - $\frac{١}{\text{س}}$ ∴ دَ (س) = $\frac{١}{\text{س}^{٢}}$

متزايدة على ]-∞ ، ٠[

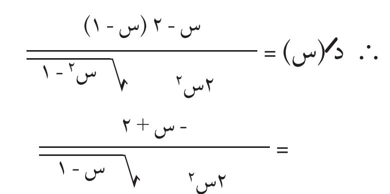
متزايدة على ] ٠ ، ∞[

٩

د(س) = $\frac{\sqrt{\text{س}-١}}{\text{س}}$ س ≥ ١

د′(س) = $\dfrac{\text{س} \times \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}-١}} - \sqrt{\text{س}-١}}{\text{س}^{٢}}$

بالضرب × ٢ $\sqrt{\text{س} - ١}$ بسطًا ومقامًا



∴ د′(س) = $\dfrac{\text{س} - ٢ (\text{س} - ١)}{٢\text{س}^{٢} \sqrt{\text{س}^{٢} - ١}}$

= $\dfrac{-\text{س} + ٢}{٢\text{س}^{٢} \sqrt{\text{س} - ١}}$

متزايدة على ] ١ ، ٢ [ ، متناقصة على ] ٢ ، ∞ [

١٠ د(س) = س + لو$_{هـ}$ س س ∈ ع$^{+}$

دَ(س) = ١ + $\frac{١}{\text{س}}$ = $\frac{\text{س} + ١}{\text{س}}$ = صفر

س = -١

د متزايدة على ] ٠ ، ∞ [

لاحظ أن الدالة غير معرفة في ] -١ ، ٠ [

١١ د(س) = ٣ - لو س$^{٢}$

س ∈ ع$^{+}$

دَ(س) = $\frac{٢}{\text{س}}$ ≠ صفر

∴ د متزايدة على ع$^{+}$

(١٢) د(س) = ٥ - ٢ هـ ^٢س^ س ∈ ع

دَ(س) = -٤ هـ ^٢س^ > صفر

متناقصة على ع

(١٣) د (س) = ظا س - س

∴ دَ(س) = قا^٢^ س ٢ - ١ = ١ + ظا^٢^ س -١

= ظا^٢^ س > صفر لكل س∈ ] ٠ ، $\frac{\pi}{4}$ [

د متزايدة على الفترة ] ٠، $\frac{\pi}{4}$ [

(١٤) د(س) = أ - جا س

دَ(س) = - جتا س

متناقصة على ] ٠ ، $\frac{\pi}{2}$ [

متزايدة على ] $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{3\pi}{2}$ [

متناقصة على ] $\frac{3\pi}{2}$ ، ٢$\pi$ [

(١٥) ع(س) = د(س) - ر(س)

عَ (س) = دَ(س) - رَ(س)

دَ(س) > رَ(س)

∴ عَ(س) = دَ(س) - رَ(س) > صفر

متناقصة لكل س∈ ع

(١٦) ك (س) = ٢٧٥٠٠ +١٨ س - ١٢ س^٢ + ٢س^٣

كَ (س) = ١٨ - ٢٤س + ٦س^٢

= ٦ ( ٣ - ٤س + س٢)

= ٦ ( ٣ -س) ( ١ -س)

عندما كَ (س) = ٠ ∴ س = ١ أو س = ٣

يكون هامش التكلفة متناقصًا عند إنتاج يتراوح بين ١٠٠٠، ٣٠٠٠ وحدة.

# ٣ - ٢

# القيم العظمى والصغرى

(Maxima and Minima (Extrema

## ٣ - ٢ القيم العظمى والصغرى (القيم القصوى)

Maxima and Minima (Extrema)

### سوف تتعلم

- مفهوم النقطة الحرجة.
- مفهوم القيم القصوى المحلية لدالة.
- اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى المحلية.
- إيجاد القيم القصوى المحلية لدالة.
- إيجاد القيم القصوى لدالة على فترة مغلقة.

### المصطلحات الأساسية

- نقطة حرجة Critical point
- قيمة عظمى محلية Local Maximum
- قيمة صغرى محلية Local Minimum
- قيم قصوى محلية Local Extrema
- قيم قصوى مطلقة Absalute Extrema

### الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية

### فكر و ناقش

يوضح الشكل المقابل منحنى الدالة د المتصلة على [ أ ، ب ]

١- حدد فترات تزايد وتناقص الدالة د

٢- عند س = حـ1 ما قيمة د/ (جـ1)؟ صِفْ تغير د على الفترة ] أ ، جـ2 [ هل د (جـ1) أكبر قيم د فى هذه الفترة؟

٣- عند س = جـ2 ما قيمةد/ (جـ2)؟ صف تغير د على الفترة ] جـ1، جـ3 [ ، هل د (جـ2) أصغر قيم د فى هذه الفترة؟

٤- هل يمكن إيجاد قيمة د/ (جـ3)؟ فسر إجابتك. صف تغير د على الفترة ]جـ2، ب [ هل د (جـ3) أكبر قيم د فى هذه الفترة؟

ص = د(س)

ص، س، و، أ، جـ1، جـ2، جـ3، ب

**تعريف — النقطة الحرجة** *Critical Point*

للدالة د المتصلة على الفترة ] أ ، ب [نقطة حرجة ( جـ ، د (جـ) ) إذا كانت جـ ∈] أ ، ب [ ، د/ (جـ) = ٠ أو د/ (جـ) غير موجودة.

فى الشكل السابق نستنتج أن:

توجد نقط حرجة عند س = جـ1 ، س = جـ2 لأن د/(جـ1) = د/(جـ2) = ٠ ويطلق عليها أحيانا نقطة التوقف stationary point، كما توجد نقطة أخرى حرجة عند س = جـ3 لأن د متصلة عند س = جـ3 وغير قابلة للاشتقاق (المشتقة اليمنى ≠ المشتقة اليسرى).

**تعريف — القيم العظمى والقيم الصغرى المحلية**

*Local Maximum and Local Minimum*

إذا كانت د دالة متصلة، مجالها ف ، جـ ∈ ف فإنه يوجد للدالة د:

**قيمة عظمى محلية عند س = جـ** إذا وجدت فترة مفتوحة ] أ ، ب [⊃ ف تحوى جـ بحيث يكون د(س)⩽ د (حـ) لكل س ∈] أ ، ب [

**قيمة صغرى محلية عند س = حـ** إذا وجدت فترة مفتوحة ] أ ، ب [⊃ ف تحوى جـ بحيث يكون د (س) ⩾ د (حـ) لكل س ∈ ] أ ، ب [

قيمة عظمى محلية

قيمة صغرى محلية



## خلفية

يبدأ هذا الدرس بتعريف النقطة الحرجة للدالة التي يكون عندها دَ (حـ) = . أو غير معرفة ثم تعريف القيم العظمى والصغرى المحلية واختبار هذه النقاط باستخدام المشتقة الأولى للدالة ثم دراسة القيم العظمى والصغرى المطلقة في فترة مغلقة.

## مخرجات تعلم الدرس

**في نهاية هذا الدرس وتنفيذ الأنشطة فيه من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:**

- يحدد النقط الحرجة لدالة.
- يعين القيم القصوى المحلية للدالة.
- يجرى اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى المحلية
- يوجد القيم القصوى المحلية للدالة
- يوجد القيم القصوى المطلقة في فترة مغلقة للدالة.

## مفردات أساسية:

نقطة حرجة، قيمة عظمى محلية، قيمة صغرى محلية - قيم قصوى مطلقة.

## المواد التعليمية المستخدمة

السبورة التعليمية - طباشير ملون - آلة حاسب علمية - برامج رسومية للحاسوب.

## مكان التدريس:

الفصل الدراسى.

## مصادر التعلم

كتاب الطالب من ص (٧٠) إلى ص (٧٥).

الشبكة الدولية للمعلومات

## تهيئة

اطلب إلى الطلاب تحديد فترات التزايد والتناقص في الشكل العلوي (فى بند فكر وناقش): التي سبق دراستها في الجبر، ثم توصل معهم إلى تعريف النقطة الحرجة للدالة ثم حدد فترات التزايد والتناقص بناءًا عن التعريف

## أخطاء شائعة:

قد يخطئ بعض الطلاب بكتابة فترات التزايد والتناقص على فترات مغلقة والصحيح أن تكتب على صورة فترات مفتوحة.

## أخطاء شائعة:

- يخطئ بعض الطلاب في التمييز بين القيم القصوى من جانب والقيم العظمى والصغرى من جانب آخر.
- أكد إلى الطلاب أن القيم القصوى تشتمل على القيم العظمى والصغرى المحلية
- أن لم يحدث، تغير في إشارة دَ(س) على جانبي النقطة الحرجة فلا توجد قيم قصوى محلية.

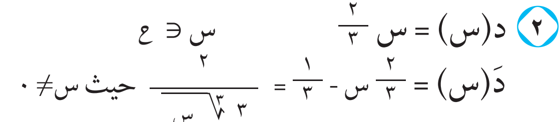
## التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

- ناقش مع الطلاب ما ورد في بند حاول أن تحل وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة

## حلول حاول أن تحل:

(١) توجد قيمة عظمى محلية عند س = -٣
وتبلغها عند ص = ٢١،
توجد قيمة صغرى محلية عند س = ٣ وتبلغها عند ص = -١٥

(٢) د(س) = س$^{\frac{2}{3}}$ س ∈ ع



دَ(س) = $\frac{٢}{٣}$ س$^{-\frac{1}{3}}$ = $\frac{٢}{٣\sqrt[3]{س}}$ حيث س ≠ ٠

∵ د(س) متصلة عند س = صفر ولايوجد مشتقة للدالة عند س = ٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية

## تفكير ناقد

∵ د(س) = س$^{٣}$ + ٣س - ٤

دَ(س) = ٣س$^{٢}$ + ٣ = ٣ (س$^{٢}$ + ١) > صفر

∴ لا توجد للدالة قيم قصوى محلية



**لاحظ أن :**

١- في بند فكر وناقش: توجد قيم عظمى محلية عند س = جـ$_{١}$ ، س = جـ$_{٣}$ ، بينما توجد قيمة صغرى محلية عند س = جـ$_{٢}$

٢- يقال على القيم العظمى والقيم الصغرى المحلية، القيم القصوى المحلية للدالة (Local Extrema).

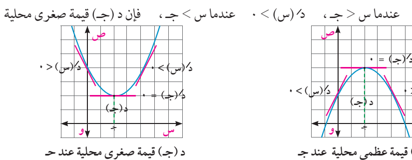
### اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى المحلية *First Derivative Test for Local Extrema*

#### تعلم

إذا كانت (جـ ، د (جـ)) نقطة حرجة للدالة د المتصلة عند جـ ، ووجدت فترة مفتوحة حول جـ بحيث:

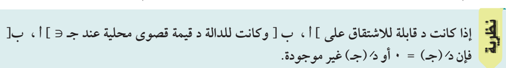
١- دَ(س) > ٠ عندما س < جـ ، دَ(س) < ٠ عندما س > جـ ، فإن د (جـ) قيمة عظمى محلية

٢- دَ(س) < ٠ عندما س < جـ ، دَ(س) > ٠ عندما س > جـ ، فإن د (جـ) قيمة صغرى محلية




د (جـ) قيمة عظمى محلية عند جـ — د (جـ) قيمة صغرى محلية عند جـ

٣- إذا لم يحدث تغير في إشارة دَ(س) على جانبي جـ ، فإنه لا يوجد للدالة د قيم قصوى محلية عند جـ..



**نظرية:** إذا كانت د قابلة للاشتقاق على ]أ ، ب[ وكانت للدالة د قيمة قصوى محلية عند جـ ∈ ]أ ، ب[ فإن دَ(جـ) = ٠ أو دَ(جـ) غير موجودة.

**اختبار المشتقة الأولى**

#### مثال

(١) إذا كان د (س) = س$^{٣}$ + ٣س$^{٢}$ - ٩س - ٧ أوجد القيم القصوى المحلية للدالة د

**الحل**

١) تحديد النقط الحرجة : د متصلة وقابلة للاشتقاق

حدد النقط الحرجة ← إبحث إشارة دَ(س) ← + ← - عظمى محلية ، - ← + صغرى محلية

∴ دَ(س) = ٣س$^{٢}$ + ٦س - ٩

= ٣ (س$^{٢}$ + ٢س - ٣) = ٣ (س + ٣) (س - ١)

عندما دَ(س) = ٠ ∴ س = -٣ أو س = ١

لدينا نقطتان حرجتان (-٣ ، د (-٣)) ، (١ ، د (١))

أي النقطتان : (-٣ ، ٢٠) ، (١ ، -١٢)









٢) اختبار المشتقة الأولى عند كل نقطة حرجة و يوضحه جدول التغيرات المقابل

| س | -∞ | -٣ | | ١ | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة دَ(س) | + | ٠ | - | ٠ | + |
| سلوك د (س) | ↗ | ٢٠ | ↘ | -١٢ | ↗ |

٣) في جوار س = -٣ تتغير إشارة دَ(س) من موجبة (قبل س = -٣) إلى سالبة (بعد س = -٣)

∴ د (-٣) = ٢٠ قيمة عظمى محلية.

وفي جوار س = ١ تتغير إشارة دَ(س) من سالبة (قبل س = ١) إلى موجبة (بعد س = ١)

∴ د (١) = -١٢ قيمة صغرى محلية.

**حاول أن تحل**

(١) إذا كان د (س) = $\frac{١}{٣}$ س$^{٣}$ - ٩س + ٣ ، أوجد القيم القصوى المحلية للدالة د

#### مثال — المشتقة الأولى غير موجودة

(٢) أوجد القيم القصوى المحلية للدالة د إذا كان د (س) = س$^{\frac{2}{3}}$ (٢س - ٥) مبينًا نوعها

**الحل**

الدالة د مجالها ع ومتصلة لكل س ∈ ع

١) تحديد النقط الحرجة:

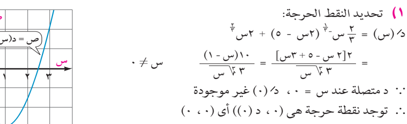
دَ(س) = $\frac{٢}{٣}$ س$^{-\frac{1}{3}}$ (٢س - ٥) + ٢س$^{\frac{2}{3}}$

= $\frac{٢[٢س - ٥ + ٣س]}{٣\sqrt[3]{س}}$ = $\frac{١٠(س - ١)}{٣\sqrt[3]{س}}$ س ≠ ٠

∵ د متصلة عند س = ٠ ، دَ(٠) غير موجودة

∴ توجد نقطة حرجة هي (٠ ، د (٠)) أي (٠ ، ٠)

عندما دَ(س) = ٠ ∴ س = ١ و يوجد عندئذ نقطة حرجة هي (١ ، د(١)) أي (١ ، -٣) كما يوضحها الشكل المقابل .




٢) اختبار المشتقة الأولى عند كل نقطة حرجة يوضحه جدول تغيرات الدالة المقابل.

| س | -∞ | ٠ | | ١ | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة دَ(س) | + | غير موجودة | - | ٠ | + |
| سلوك د (س) | ↗ | - | ↘ | -٣ | ↗ |

٣) عند س = ٠ توجد قيمة عظمى محلية = ٠

عند س = ١ توجد قيمة صغرى محلية = -٣

**حاول أن تحل**

(٢) أثبت أن للدالة د حيث د (س) = $\sqrt[3]{س^{٢}}$ قيمة صغرى محلية.

**تفكير ناقد:** هل للدالة د حيث د (س) = س$^{٣}$ + ٣س - ٤ قيم قصوى محلية؟ فسر إجابتك.



مثال

دوال كسرية

③ أوجد القيم القصوى المحلية للدالة د حيث $د(س) = س + \frac{٤}{س}$ مبينًا نوعها

الحل

مجال د = ع - {٠}

١) تحديد النقط الحرجة: $د'(س) = ١ - ٤س^{-٢} = \frac{س^٢ - ٤}{س^٢}$ للدالة نقطتان حرجتان هما (٢، د(٢)) ، (-٢، د (-٢)) أى (٢ ، ٤) ، (-٢ ، -٤).

٢) اختبار المشتقة الأولى عند كل نقطة حرجة يوضحه جدول تغيرات الدالة المقابل (لاحظ استبعاد س = ٠ من مجال د).

| س | -∞ | -٢ | | ٠ | | ٢ | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د′(س) | + | | − | ‖ | − | | + |
| سلوك د (س) | ↗ | -٤ | ↘ | ‖ | ↘ | ٤ | ↗ |

٣) عند س = -٢ توجد قيمة عظمى محلية = -٤
وعند س = ٢ توجد قيمة صغرى محلية = ٤

**لاحظ أن:** قد تكون القيمة العظمى المحلية أصغر من القيمة الصغرى المحلية للدالة

**تكنولوجيا:** يبين الشكل المقابل منحنى الدالة د باستخدام أحد البرامج الرسومية، قارن بين جدول تغيرات الدالة ومنحناها . ماذا تلاحظ؟

حاول أن تحل

③ أوجد القيم القصوى المحلية للدالة د حيث $د(س) = \frac{س^٢}{١ - س}$ مبينًا نوعها

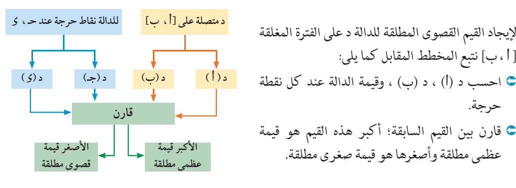
## تعلم

**القيم القصوى لدالة على فترة مغلقة** *The Absalute Extrema of Function on a Closed Interval*

**نظرية** إذا كانت الدالة د متصلة على الفترة [أ ، ب ] فإن للدالة د قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة على الفترة [أ ، ب].

لإيجاد القيم القصوى المطلقة للدالة د على الفترة المغلقة [أ ، ب] نتبع المخطط المقابل كما يلى:

- احسب د (أ) ، د (ب) ، وقيمة الدالة عند كل نقطة حرجة.
- قارن بين القيم السابقة؛ أكبر هذه القيم هو قيمة عظمى مطلقة وأصغرها هو قيمة صغرى مطلقة.






## التقييم المستمر ( الحوار والمناقشة )

**فى بند حاول أن تحل توصل مع طلابك إلى الإجابة الصحيحة من خلال المناقشة**

## الحلول :

### حاول أن تحل (٣)

مجال د = ع - {١}

$د'(س) = \frac{٢س - س^٢}{(١ - س)^٢}$ ، $د'(س) = ٠$

∴ س = صفر أو س = ٢

عند س = ١ خط تقاربى رأسى

القيمة الصغرى المحلية د(٠) = صفر

القيمة العظمى المحلية د(٢) = -٤

⌑ أكد لطلابك أنه قد تكون القيمة العظمى المحلية أصغر من القيمة الصغرى المحلية كما أنه قد تواجد خطوط تقارب رأسية أو أفقية أو مائلة للدالة.

### حاول أن تحل (٤)

أ) د(٠) = ٠ ، د (٤) ≃ ٠,٧٣

$د'(س) = ١٠ هـ^{-س} + ١٠ س × - هـ^{-س}$

$= ١٠ هـ^{-س} [١ - س] = صفر$

$هـ^{-س} \neq صفر$ ، ١ - س = ٠ ∴ س = ١

١ ∈ ]٠ ، ٤[ ∴ $د(١) = ١٠ هـ^{-١} \simeq ٣,٧$

القيمة العظمى المطلقة = ٣,٧

القيمة الصغرى المطلقة = صفر

ب) $د'(س) = \frac{(س^٢+١) × ٤ - ٤س × ٢س}{(س^٢+١)^٢} = \frac{٤ - ٤س^٢}{(س^٢+١)^٤}$

د′(س) = صفر ∴ س = -١ أو س =١

د(-١) = -٢ ، د(١) = ٢ ، د (٣) = ١,٢

القيمة العصغرى المطلقة = ٢ ، القيمة الصغرى المطلقة = -٢

**نشاط :**

## الهدف من النشاط :

**سرعة اجراء قسمة دالة كثيرة الحدود علي دالة أخرى خطية**

**سلم تقييم النشاط :**

| التقدير | الأداء |
|---|---|
| ممتاز | يقوم باجراء النشاط دون اخطاء و يتوصل إلى الناتج الصحيح |
| جيد جدًا | يقوم باجراء النشاط كاملًا ويخطئ فى إحدى خطواته |
| جيد | يقوم فى إجراء النشاط ويخطء فى اكثر من خطوة |
| مقبول | يقوم باجراء النشاط ولم يتمكن من الحل |
| ضعيف | لم يتمكن من فهم النشاط والإجابة على معظم اسئلته |
| ضعيف جدا | لم يتمكن من فهم اسئلة النشاط ولم يتمكن من الأجابة ويحتاج إلى الرعاية والتوجيه |

## تمارين (٣-٢)

## الحلول

(١) (٠، ٠) عظمى ، (٢، -٤) صغرى

(٢) (-١، -٢) عظمى ، (١، ٢) صغرى

(٣) (٠، ٠) عظمى ، (١، -١) صغرى

(٧) (-١، ٢) عظمى ، (١، -٢) صغرى

(٨) (٠، ٣) عظمى محلية

(٩) (-٢، ٠) صغرى محلية

(١١) (-١ و -٣) عظمى محلية   (٣، ٥) صغرى محلية

(١٤) (٢، ٧,٤) عظمى محلية

(١٩) القيمة الصغرى المطلقة = -١

القيمة العظمى المطلقة = ٣

(٢١) العظمى المطلقة = $\sqrt{٢}$

الصغرى المطلقة = $-\sqrt{٢}$

(٢٢) الصغرى المطلقة = صفر

العظمى المطلقة = ٠,٣٧

(٢٥) ∵ د(س) = أ س$^{٣}$ + ب س$^{٢}$ + جـ س + د

(٠، ٠) تحقق المعادلة

∴ ء = صفر

له نقطة حرجة عند س = ١   ∴ د/(١) = صفر

د/(س) = ٣ أ س$^{٢}$ + ٢ ب س + جـ

د/(١) = ٣ أ + ٢ ب + جـ = صفر

(٢، د(٢)) نقطة تماس المماس الذى ميله = -٩

د/(٢) = -٩

-٩ = ١٢ أ + ٤ ب + جـ

عند س = ٢   ∴ ١٨ + ص = ٢٠

ص = ٢

(٢، ٢) ∈ للمنحنى

٢ = ٨أ + ٤ ب + ٢ جـ + ء

٨ أ + ٤ ب + ٢ جـ = ٢

أ = ١ ، ب = -٩ ، جـ = ١٥



**مثال** — دوال أسية

(٤) أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة د حيث د (س) = س$^{٣}$ - ١٢ س + ١٢ ، س ∈ [-٣ ، ٣]

**الحل**

∵ د (س) = س$^{٣}$ - ١٢ س + ١٢ ، س∈ [-٣ ، ٣]

∴ د (-٣) = (-٣)$^{٣}$ - ١٢(-٣) + ١٢ = ٢١   (١)

، د (٣) = (٣)$^{٣}$ - ١٢(٣) + ١٢ = ٣   (٢)

د/ (س) = ٣ س$^{٢}$ - ١٢ = ٣ (س - ٢) (س + ٢)

لتحديد النقط الحرجة نضع د/ (س) = ٠

∴ س = ٢ ∈ [-٣ ، ٣]   أو س = -٢ ∈ [-٣ ، ٣]

عند س = ٢ توجد نقطة حرجة و يكون : د (٢) = -٤   (٣)

عند س = -٢ توجد نقطة حرجة و يكون : د (-٢) = ٢٨   (٤)

بمقارنة قيم ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ نجد أن:

للدالة د قيمة عظمى مطلقة = ٢٨ ، قيمة صغرى مطلقة = ٤ هـ$^{-٢}$ ≃ ٠,٥٤١

**حاول أن تحل**

(٤) أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة د

(أ) د (س) = ١٠س هـ$^{-س}$   س ∈ [٠ ، ٤]

(ب) د (س) = $\frac{٤س}{س^{٢}+١}$   س ∈ [-١ ، ٣]

**حساب قيم كثيرات الحدود**

**نشاط**

١) لتكن د (س) = أس$^{٣}$ +ب س$^{٢}$+ جـ س + ء   كثيرة الحدود مرتبًا تنازليًّا حسب قوس س

= س ( أ س$^{٢}$ + ب س + حـ) + ء   بأخذ س عامل مشترك

= س (س ( أ س + ب) + حـ) + ء   بأخذ س عامل مشترك مرة ثانية

لاحظ أن عدد الأقواس المفتوحة = عدد الأقواس المغلقة   (تسمى هذه الصيغة nested form)

٢) إذا كانت د (س) = س$^{٣}$ + ٣س$^{٢}$ - ٩س -٧   فإن د(س) = س (س (س +٣) -٩ ) -٧

لإيجاد د (١) ابدأ بالتعويض من الداخل للخارج   ∴ د (١) = -١٢ ، د (-١) = ١٥ ، د (٣) = ٢٠

أكمل : د (٢) = ........ ، د (-٢) = ........

٣) يمكن حساب قيمة كثيرة الحدود السابقة بطريقة مختصرة كما يلى:

- اكتب معاملات قوس س مرتبة تنازليًّا.
- اترك أول معامل ثم اضرب المعامل الأول فى قيمة س واكتب الناتج أسفل المعامل الثانى ثم اجمع.
- كرر عمليتى الضرب والقسمة على الترتيب فتجد أن د(٣) = ٢٠

| المعاملات | ١ | ٣ | -٩ | -٧ |
|---|---|---|---|---|
| | | ٣ | ١٨ | ٢٧ |
| د(٣) | ١ | ٦ | ٩ | ٢٠ |

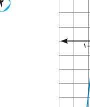


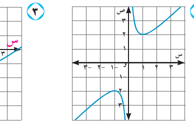


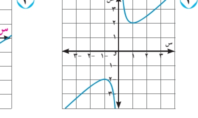
٤) إذا كانت د (س) = ٢س$^{٣}$ + ٤س$^{٢}$ - ٦س + ٥ أوجد قيمة كل من : د(٢) ، د (-٤) ، د (-٦) بالطرق السابقة.




**حدد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) للدالة د فى الأشكال التالية وبين نوعها:**

(١) 

(٢) 

(٣) 

**أوجد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) للدالة د فى كل مما يأتى مبينًا نوعها:**

(٤) د (س) = س$^{٣}$ + ٣س$^{٢}$ + ٢   (٥) د (س) = س$^{٤}$ - ٢س$^{٢}$   (٦) د (س) = ٤س - س$^{٣}$

(٧) د (س) = ٣س$^{٥}$ - ٥س$^{٣}$   (٨) د (س) = ٣ - س$^{\frac{٢}{٣}}$   (٩) د (س) = (س + ٢)$^{\frac{٢}{٣}}$

(١٠) د (س) = س + $\frac{٤}{س^{٢}}$   (١١) د (س) = س + $\frac{٤}{س - ١}$   (١٢) د (س) = $\frac{٣}{س - ٢}$

(١٣) د (س) = ٤ هـ$^{-س^{٢}}$   (١٤) د (س) = هـ$^{س}$ (٣ - س)   (١٥) د (س) = هـ$^{س}$ + هـ$^{-س}$

(١٦) د (س) = س - لوهـ س   (١٧) د (س) = ٨لوهـ س - س$^{٢}$   (١٨) د (س) = (س - ١) لوهـ س

**أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة د على الفترة المعطاة:**

(١٩) د (س) = س$^{٣}$ - ٣س + ١ ، س ∈ [-٢ ، ١]   (٢٠) د (س) = $\sqrt{س - ١}$ ، س ∈ [٢ ، ٥]

(٢١) دس = جا س + جتا س ، س ∈ [٠ ، ٢$\pi$]   (٢٢) د (س) = س هـ$^{-س}$ ، س ∈ [٠ ، ٢]

**أوجد قيمة كل من كثيرات الحدود التالية عند قيم س المعطاة:**

(٢٣) د (س) ٤س$^{٣}$ - ٣س$^{٢}$ - ٥س + ٣ ، عند س = -٣

(٢٤) د (س) ٣س$^{٥}$ + ٢س$^{٣}$ + ٦س$^{٢}$ + ٥س - ١٧ ، عند س = -٢

**أجب عما يلى:**

(٢٥) تفكير ابداعى: أوجد قيم أ ، ب ، حـ ، ء بحيث يحقق المنحنى د (س) = أس$^{٣}$+ ب س$^{٢}$+ جـ س + ء الشروط التالية معًا:

(أ) يمر بنقطة الأصل.   (ب) له نقطة حرجة عند س = ١

(جـ) معادلة المماس للمنحني عند النقطة (٢ ، د (٢)) عليه هى ٩س + ص = ٢٠

(٢٦) كثيرة الحدود: د(س) = ٢س$^{٥}$ + ٣س$^{٣}$ - ٤س

احسب مسترشدا بنشاط ص٧٤ كل من: د(-٢) ، د(-٣)، د(٢) ، د(٣) ماذا تلاحظ؟ فسر إجابتك.



# ٣ - ٣
# رسم المنحنيات
curve sketching

## خلفية:

سبق أن درس الطالب فترات التزايد والتناقص للدالة وكذلك استخدام المشتقة الأولى في تحديد القيم القصوى للدالة(العظمى والصغرى المحلية) مع دراسة للقيم العظمى والصغرى المطلقة في فترة مغلقة، وسوف يدرس في هذا الدرس تحديد فترات تحدب منحنى الدالة لأعلى ولأسفل إمكانية وجود نقط انقلاب للدالة، من خلال ذلك بالإضافة لمفهوم التماثل وخواص الدوال الزوجية والفردية سيقوم الطالب برسم منحنيات الدوال.

## مخرجات التعلم

**في نهاية هذا الدرس وتنفيذ الأنشطة فيه من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:**

- يحدد فترات التزايد والتناقص.
- يوجد نقاط الأنقلاب للدالة أن وجدت.
- يستخدم اختيار المشتقة الثانية لايجاد القيم القصوى المحلية للدالة.
- يقوم برسم منحنيات على الدوال الجبرية تشتمل دوال كثيرات الحدود حتى الدرجة الثالثة.

## مفردات أساسية

التحدب - تحدب لأعلى - تحدب لأسفل- نقطة إنقلاب.

## المواد التعليمية المستخدمة

السبورة التعليمية - طباشير ملون - آآة حاسبة علمية - برامج رسومية للحاسوب

## مكان التدريس

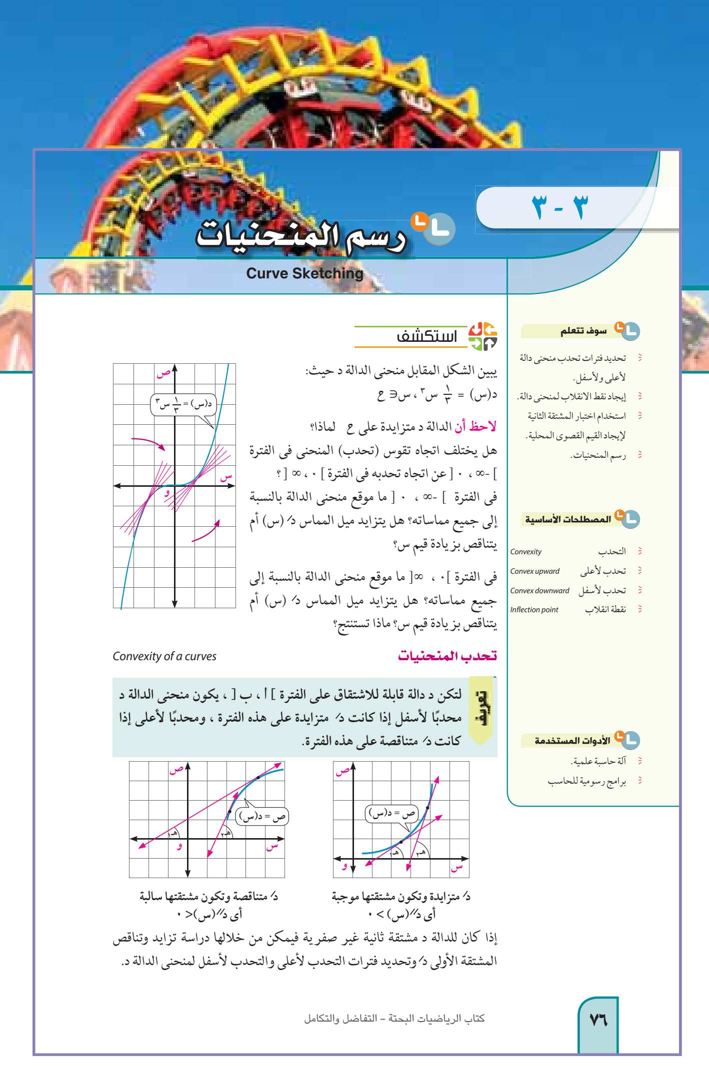
الفصل الدراسي

## مصادر التعلم

كتاب الطالب من ص (٧٦) إلى ص (٨٤).

## تهيئة

- ذكر الطلاب بما سبق دراسة عن رسم منحنيات بعض الدوال



٣ - ٣

رسم المنحنيات

Curve Sketching

**سوف تتعلم**

- تحديد فترات تحدب منحنى دالة لأعلى ولأسفل.
- إيجاد نقط الانقلاب لمنحنى دالة.
- استخدام اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية.
- رسم المنحنيات.

**المصطلحات الأساسية**

- التحدب Convexity
- تحدب لأعلى Convex upward
- تحدب لأسفل Convex downward
- نقطة انقلاب Inflection point

**الأدوات المستخدمة**

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسب

استكشف

يبين الشكل المقابل منحنى الدالة د حيث:

د(س) = $\frac{١}{٣}$ س$^٣$ ، س∈ ع



لاحظ أن الدالة د متزايدة على ع لماذا؟

هل يختلف اتجاه تقوس (تحدب) المنحنى فى الفترة ] -∞ ، ٠ [ عن اتجاه تحدبه فى الفترة ] ٠ ، ∞ [ ؟

فى الفترة ] -∞ ، ٠ [ ما موقع منحنى الدالة بالنسبة إلى جميع مماساته؟ هل يتزايد ميل المماس دَ (س) أم يتناقص بزيادة قيم س؟

فى الفترة ]٠ ، ∞[ ما موقع منحنى الدالة بالنسبة إلى جميع مماساته؟ هل يتزايد ميل المماس دَ (س) أم يتناقص بزيادة قيم س؟ ماذا تستنتج؟

**تحدب المنحنيات** Convexity of a curves

**تعريف**

**لتكن د دالة قابلة للاشتقاق على الفترة ] أ ، ب [ ، يكون منحنى الدالة د محدبًا لأسفل إذا كانت دَ متزايدة على هذه الفترة ، ومحدبًا لأعلى إذا كانت دَ متناقصة على هذه الفترة.**



دَ متزايدة وتكون مشتقتها موجبة أى دً(س) > ٠

دَ متناقصة وتكون مشتقتها سالبة أى دً(س)< ٠

إذا كان للدالة د مشتقة ثانية غير صفرية فيمكن من خلالها دراسة تزايد وتناقص المشتقة الأولى دَ وتحديد فترات التحدب لأعلى والتحدب لأسفل لمنحنى الدالة د.

٧٦ كتاب الرياضيات البحتة - التفاضل والتكامل

ومنها الدوال التربيعية، الدوال التكعيبية موضحًا فترات التزايد والتناقص و إشارة ميل الماس للمنحنى عند كل فترة.

- في بند تحدب المنحنيات:
- أكد إلى الطلاب - بما جاد في العريف ص (٧٦) الخاص بمفهوم تحدب المنحنى لأعلى وتحدبة لأسفل وأن يكون منحنى الدالة (د) محدبًا إلى أسفل إذا كانت دَ متزايدة على الفترة ] ا ، ب [ .

## اخطاء شائعة:

- قد يخلط بعض الطلاب بين فترات التزايد والتناقص للدوال ومناطق التحدب إلى أعلى و إلى أسفل للدالة.
- أكد إلى الطلاب على تعريف فترات التزايد وفترات التناقص، مناطق التحدب لأعلى ولأسفل من خلال التعريف.

## معلومات إثرائية للمعلم

**يصاغ اختبار المشتقة الثانية في بعض المراجع على النحو الآتى:**

- إذا كانت س ∋ ] أ ، ب [ فإن تقعر المنحنى يكون لأعلى إذا كانت $د''(س) > ٠$ .
- إذا كانت س ∋ ] أ ، ب [ فإن تقعر المنحنى يكون لأسفل إذا كانت $د''(س) < ٠$ .

مع ملاحظة إن هذا التعريف يشمل الفترات غير المحدودة مثل ] أ ، ∞ [ ، ] -∞ ، أ [

### في بند نقطة الأنقلاب:

- أشر إلى الطلاب أنه إذا كانت د دالة متصلة عند أ ، تسمى (أ ، د(أ)) نقطة إنقلاب (إنعطاف) inflection point لمنحنى د إذا غير منحنى الدالة د تحدبه عندها
- أكد إلى الطلاب أنه عند نقطة الإنقلاب تكون $د''(أ) = ٠$ أو غير موجودة.

### بنود موضوعية يمكن اعطانها للطلاب:

**ضع علامة (✓) أو (✗)**

١- إذا كانت ((أ) ، د (أ)) نقطة إنقلاب للدالة د فإن $د''(أ) = ٠$

٢- النقطة (٠ ، ٠) نقطة إنقلاب للدالة د حيث $د(س) = \sqrt[3]{س^{٢}}$

٣- منحنى الدالة $د(س) = \frac{١}{س}$ محدب لأسفل في ع.

٤- منحنى الدالة ق : ] ١ ، ٤ [ ⟵ ع، $ق(س) = س^{٣} - ٣س$ محدب لأسفل في ] ١ ، ∞ [.

٥- يوجد للدالة د حيث $د(س) = س^{٣} - ٣س$ نقطة انقلاب.

**أختر الإجابة الصحيحة من بين الأجابات المعطاة**

(١) إذا كانت $ق(س) = س^{٣} - ٣س - ١$ فإن نقطة الإنقلاب لبيان ق هي.

أ (٠ ، -١) ب (١ ، -٣)
ج (-١ ، ١) د (٠ ، ١)

(٢) الدالة التي تحدب منحناها إلى أعلى في ع هي:

أ $د(س) = ٣ + س^{٤}$ ب $د(س) = -٣ س^{٣}$
ج $د(س) = ٣ - س^{٢}$ د $د(س) = |س|$

(٣) توجدنقطة إنقلاب لبيان الدالة د حيث $د(س) = |س^{٢} - ٤|$ عند .

أ (-٢ ، ٠) ب (٢ ، ١)
ج (٠ ، ٠) د (٠ ، -٢)



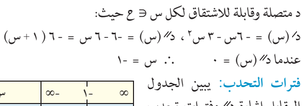
**اختبار المشتقة الثانية لتحدب المنحنيات** *The Second Derivative Test for Convexity*

**نظرية**
لتكن د دالة قابلة للاشتقاق مرتين على الفترة ]أ ، ب[
١- إذا كان $د''(س) > ٠$ لجميع قيم س ∋ ]أ ، ب[ فإن منحنى د يكون محدبًا لأسفل على الفترة ]أ ، ب[
٢- إذا كان $د''(س) < ٠$ لجميع قيم س ∋ ]أ ، ب[ فإن منحنى د يكون محدبًا لأعلى على الفترة ]أ ، ب[

**مثال** تحديد فترات تحدب كثيرات الحدود

(١) إذا كان $د(س) = ٢ - ٣س^{٢} - س^{٣}$ عين الفترات التى يكون فيها منحنى الدالة د محدبًا لأعلى ، والفترات التى يكون فيها محدبًا لأسفل.

**الحل**



د متصلة وقابلة للاشتقاق لكل س ∋ ع حيث:
$د'(س) = -٦س - ٣س^{٢}$ ، $د''(س) = -٦ - ٦س = -٦(١ + س)$
عندما $د''(س) = ٠$ ∴ س = -١

**فترات التحدب:** يبين الجدول المقابل إشارة د'' وفترات تحدب منحنى الدالة د لأعلى ولأسفل،

| س | -∞ | -١ | ∞ |
|---|---|---|---|
| إشارة د'' | + | ٠ | – |
| تحدب منحنى د | ‿ | | ⁀ |

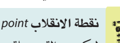
**أى إن:** منحنى الدالة محدب لأسفل فى الفترة ]-∞ ، -١ [ ومحدب لأعلى فى الفترة ] -١ ، ∞[

**حاول أن تحل**

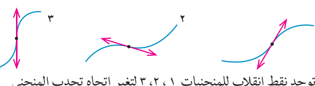
(١) حدد فترات التحدب لأعلى والتحدب لأسفل لكل من المنحنيات التالية:
أ $د(س) = س^{٢} - ٤س + ٢$ ب $ر(س) = س^{٤} - ٤س^{٣}$

**تكنولوجيا:** باستخدام أحد البرامج الرسومية إرسم منحنى الدالتين د ، ر حيث $ر(س) = \sqrt[3]{س}$ ، $(س) = س^{\frac{٢}{٣}}$ وحدد فترات التحدب لأعلى والتحدب لأسفل وحقق إجابتك باستخدام اختبار المشتقة الثانية .

**لاحظ أن:** قد يتغير اتجاه تحدب منحنى الدالة المتصلة من أعلى إلى أسفل أو من أسفل إلى أعلى عند نقطة تنعدم عندها المشتقة الثانية للدالة أو تكون غير موجودة .



**تعريف**
**نقطة الانقلاب** *Inflection point*
لتكن د دالة متصلة عند س = جـ ؛ تسمى النقطة ( جـ ، د(جـ) ) نقطة انقلاب لمنحنى الدالة د إذا وفقط إذا غير المنحنى اتجاه تحدبه عند هذه النقطة وكان للمنحنى مماسًا عندها.




توجد نقط انقلاب للمنحنيات ١ ، ٢، ٣ لتغير اتجاه تحدب المنحنى ووجود مماس له عند جـ

لا توجد نقط انقلاب لعدم وجود مماس عند جـ







**لاحظ أن:**
١- المماس عند نقطة الانقلاب يقطع منحنى الدالة، لأن المنحنى فى إحدى جهتى هذه النقطة يقع تحت المماس ، وفى الجهة الأخرى يقع فوق المماس.
٢- **فى الشكل المقابل** يوجد لمنحنى الدالة د نقطتى انقلاب الأولى عند نقطة الأصل و (٠ ، ٠) والأخرى عند النقطة ب (٢، د(٢)).

**مثال** التحدب ونقط الانقلاب

(٢) إذا كانت د(س) = { $س^{٢} - ٤$ عندما س < -٢ ؛ $س^{٣} - ٣س + ٢$ عندما س ⩾ -٢ }

حدد فترات تحدب منحنى د لأعلى ولأسفل ، وأوجد نقط الانقلاب ومعادلة المماس عندها إن وجد.

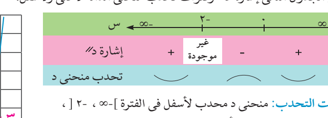
**الحل**

الدالة د متعددة التعريف مجالها ع ، ومتصلة عند س = -٢ لأن $د(-٢)^{-} = د(-٢)^{+} = ٠$

$د'(س)$ = { ٢س عندما س < -٢ ؛ $٣س^{٢} - ٣$ عندما س > -٢ ؛ غير موجودة عندما س = -٢ } [ $د'(-٢^{-}) \neq د'(-٢^{+})$ ]

$د''(س)$ = { ٢ عندما س < -٢ ؛ ٦س عندما س > -٢ }

يبين الجدول التالى إشارة د'' وفترات تحدب منحنى الدالة لأعلى ولأسفل.



| س | -∞ | -٢ | | ٠ | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د'' | + | غير موجودة | - | | + |
| تحدب منحنى د | ‿ | | ⁀ | | ‿ |

**فترات التحدب:** منحنى د محدب لأسفل فى الفترة ]-∞ ، -٢ [ ، الفترة ] ٠ ،∞ [ ومحدب لأعلى فى الفترة ]-٢، ٠[

**نقط الانقلاب**

- النقطة ( -٢ ، د(-٢)) أى ( -٢ ، ٠) ليست نقطة انقلاب لمنحنى د رغم تغير اتجاه تحدبه حولها، لعدم وجود مماس لمنحنى الدالة عند هذه النقطة (د'(س) غير موجودة)
- النقطة (٠ ، د(٠)) أى (٠، ٢) هى نقطة انقلاب لمنحنى د لتغير اتجاه تحدبه حولها، ويوجد عندها مماس للمنحنى يقطعه فى هذه النقطة ، ميله د'(س) = -٣، ومعادلته هى : ص - ٢ = -٣ س (كما فى الرسم)

**حاول أن تحل**

## التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

### حل حاول أن تحل (ص ٧٧) :



أ لا توجد قيم للمتغير س يمكن بحث تحدب المنحنى عندها

ب رَ(س) = ٤ س$^{٣}$ - ١٢ س$^{٢}$ ،

رً(س) = ١٢ س$^{٢}$ - ٢٤ س

س = ٠ ، س = ٢ تجعل دً(س) = ٠

مناطق التحدب لأسفل هي : ] -∞ ، ٠ [ ، ] ٢ ، ∞ [

مناطق التحدب لأعلى هي : ] صفر ، ٢ [ .

### في بند تفكير ناقد ص (٨١)

يهدف إلى تعيين فترات التحدب لأعلى ولأسفل لمنحنى الدالة وإيجاد نقط الإنقلاب من خلال شكل بياني مرسوم للمشتقة الثانية.

### إجابة التفكير:

من الرسم دً(١) = صفر

( ١ ، د(١) ) نقطة سيقدم عندها المشتق الثاني للدالة،

دً(١) > صفر ، دً(١) < صفر

∴ ( ١ ، د(١) ) نقطة انقلاب.

المنحنى محدب لأعلى على الفترة ] -∞ ، ٠ [

المنحنى محدب لأسفل على الفترة ] ١ ، ∞ [

## التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

### ناقش مع طلابك ما ورد في بند حاول أن تحل وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة



(٣) (ص ٨٠)

د(س) = س$^{٣}$ - ٣ س$^{٢}$ - ٩س

دَ(س) = ٣ س$^{٢}$ - ٦س - ٩

دً(س) = ٦ س - ٦

دً(س) = صفر ∴ س = ٣ ، س = -١

دً(٣) = ١٨ - ٦ = ١٢ > صفر

دً(-١) = -٦ - ٦ = -١٢ < صفر

د(٣) قيمة صغرى محلية = - ٢٧

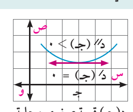
د (-١) قيمة عظمى محلية = ٥

---



(٢) إذا كانت د (س) = { (س + ٣)$^{٢}$ عندما س < -١ ، ٣س$^{٢}$ - س$^{٣}$ عندما س ⩾ -١ }

حدد فترات التحدب لأعلى والتحدب لأسفل لمنحنى الدالة د ، وأوجد نقط الانقلاب ومعادلة مماس المنحنى عندها إن وجد.





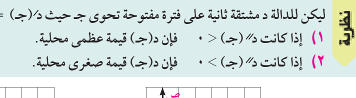
تفكير ناقد: يمثل الشكل المقابل منحنى دً (س) على الفترة ] -٢، ٥[ للدالة المتصلة د.

- وضح فترات التحدب لأعلى والتحدب لأسفل لمنحنى الدالة د إن وجدت.
- هل توجد نقط انقلاب لمنحنى د فى هذه الفترة ؟ فسر إجابتك.



#### اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى المحلية

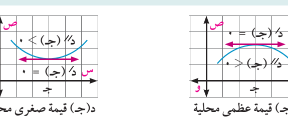
*The Second Derivative Test for Local Extrema*



**نظرية** ليكن للدالة د مشتقة ثانية على فترة مفتوحة تحوى جـ حيث دَ(جـ) = ٠

١) إذا كانت دً (جـ) < ٠ فإن د(جـ) قيمة عظمى محلية.

٢) إذا كانت دً (جـ) > ٠ فإن د(جـ) قيمة صغرى محلية.





د(جـ) قيمة عظمى محلية — د(جـ) قيمة صغرى محلية

مثال **القيم القصوى المحلية**

(٣) استخدم اختبار المشتقة الثانية فى إيجاد القيم القصوى المحلية للدالة د حيث : د(س) = س$^{٤}$ - ٨س$^{٢}$ + ١٠

الحل

د(س) كثيرة حدود فهى متصلة ومجالها ع

دَ (س) = ٤س$^{٣}$ - ١٦ س = ٤س (س$^{٢}$ - ٤) ، دً (س) = ١٢س$^{٢}$ - ١٦

للدالة نقط حرجة عندما دَ (س) = ٤س (س$^{٢}$ - ٤) = ٠ أى عند : س = ٠ ، س = ٢ ، س = -٢

اختبار المشتقة الثانية لوجود قيم قصوى محلية:

عند س = ٠ دً (٠) = -١٦ < ٠ ∴ د(٠) = ١٠ قيمة عظمى محلية

عند س = ٢ دً (٢) = ٣٢ > ٠ ∴ د(٢) = -٦ قيمة صغرى محلية

عند س = -٢ دً (-٢) = ٣٢ > ٠ ∴ د(-٢) = -٦ قيمة صغرى محلية





---



تكنولوجيا: باستخدام الحاسبة البيانية (نشاط) ارسم منحنى الدالة فى المثال السابق لتكتشف خواص منحنى الدالة وتتحقق من موضع القيم العظمى والصغرى المحلية لهذه الدالة.

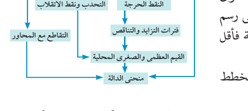
حاول أن تحل

(٣) باستخدام اختبار المشتقة الثانية أوجد القيم القصوى المحلية للدالة د حيث د(س) = س$^{٣}$ - ٣س$^{٢}$ - ٩س وتحقق من صحة إجابتك باستخدام الحاسبة البيانية أو البرامج الرسومية.

#### رسم منحنيات كثيرات الحدود

*Curve Sketching for Polynomials*

يستخدم حساب التفاضل فى رسم المنحنيات وهو التمثيل البيانى للدوال، ويعتمد على تتبع سلوك د(س) للدالة د عندما تتغير قيمة س فى فترة معينة، وتمثيل الأزواج المرتبة (س ، ص) فى المستوى الإحداثى المتعامد حيث ص = د(س) وسنقصر دراستنا فى رسم منحنيات الدوال على دوال كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة فأقل على الصورة د(س) = أ س$^{٣}$ + ب س$^{٢}$ + جـ س + ى لرسم الشكل العام لمنحنى الدالة د حيث ص = د(س) نتبع المخطط المقابل كما يلى:





١- إذا كانت د زوجية يكون منحناها متماثلاً بالنسبة لمحور الصادات، ويكون متماثلاً حول نقطة الأصل إذا كانت د فردية.

٢- دراسة تغيرات الدالة وتحديد فترات التحدب ونقط الانقلاب إن وجدت والقيم القصوى المحلية إن وجدت.

٣- إعداد جدول التزايد والتناقص والتحدب لمعرفة الشكل العام للمنحنى ونوع النقط الحرجة.

٤- إيجاد نقط تقاطع منحنى الدالة مع محورى الإحداثيات .

٥- رسم تخطيطى لمنحنى الدالة ويمكن الاستعانة ببعض النقط الإضافية لتحسين الرسم.

مثال **رسم منحنى دالة**

(٤) ارسم الشكل العام لمنحنى الدالة د حيث ص = د(س) = س$^{٣}$ - ٣س$^{٢}$ + ٤

الحل

١- الدالة د كثيرة حدود مجالها ع ، والدالة ليست زوجية وليست فردية.

٢- دَ (س) = ٣س$^{٢}$ - ٦س = ٣س (س - ٢) ، دً (س) = ٦س - ٦ = ٦ (س - ١)

للدالة نقط حرجة عند دَ(س) = ٠ أى عند س = ٠ ، س = ٢

وتكون د متزايدة فى الفترة ] -∞ ، ٠ [ والفترة ] ٢ ، ∞ [ ومتناقصة فى الفترة ] ٠ ، ٢ [

دً (س) = ٠ عند س = ١

دً (س) < ٠ فى الفترة ] -∞ ، ١ [ ويكون المنحنى محدبًا لأعلى فى هذه الفترة،

دً (س) > ٠ فى الفترة ] ١ ، ∞ [ ويكون المنحنى محدبًا لأسفل فى هذه الفترة

النقطة (١ ، د(١)) أى (١ ، ٢) نقطة انقلاب.

### ٤ (ص ٨١)

ص = ١٢ س - س^٣

بوضع س = ٠

∴ ص = ٠

ص′ = ١٢ - ٣ س^٢

س = ±٢

د (٢) = ١٦ ، د (-٢) = -١٦

ص″ = -٦ س = صفر

س = صفر

د(صفر) = صفر (٠ ، ٠)

د(س) = ١٢ س - س^٣

### ٦ ص (٨٤)

∴ (٢ ، ٢) نقطة انقلاب

∴ تحقق معادلة المنحنى

٢ = ٨ + ٤أ + ٢ ب

٤أ + ٢ب = -٦

د′(س) = ٣ س^٢ + ٢أس + ب

د″(س) = ٦ س + ٢أ

∴ د″(٢) = صفر

١٢ + ٢أ = ٠

أ = -٦

- ٢٤ + ٢ب = -٦

٢ب = ١٨ ∴ ب = ٩

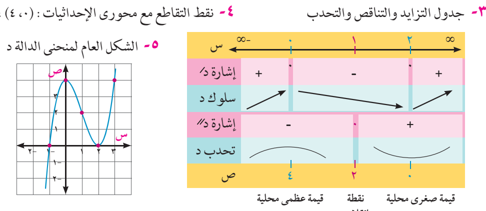
∴ د (س) = س^٣ - ٦ س^٢ + ٩

### في بند نشاط (ص ٨٤)

⌑ يهدف هذا النشاط إلى تدريب الطالب على استخدام الآلة الحاسبة البيانية في رسم المنحنيات حتى يتحقق الطالب من حلول الجبرية وهذا بمثابة تأكيد على مدى ما توصل إلية من حلول باستخدام التفاصل



٣- جدول التزايد والتناقص والتحدب



| س | -∞ | ٠ | | ١ | | ٢ | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د′ | + | ٠ | - | | - | ٠ | + |
| سلوك د | ↗ | | ↘ | | ↘ | | ↗ |
| إشارة د″ | - | | - | ٠ | + | | + |
| تحدب د | ⌒ | | ⌒ | | ◡ | | ◡ |
| ص | | ٤ | | ٢ | | ٠ | |
| | | قيمة عظمى محلية | | نقطة انقلاب | | قيمة صغرى محلية | |

٤- نقط التقاطع مع محورى الإحداثيات : (٠، ٤) ، (٢، ٠)

٥- الشكل العام لمنحنى الدالة د

نقط إضافية : (-١ ، د(-١)) أى (-١ ، ٠) (٣ ، د(٣)) أى (٣ ، ٤)

**حاول أن تحل**

٤ ارسم الشكل العام لمنحنى الدالة د حيث ص = د(س) = ١٢ س - س^٣

**مثال**

**الشكل العام لمنحنى دالة**

٥ ارسم شكلاً عامًّا لمنحنى الدالة د حيث ص = د(س) إذا علمت مايلى:

١- د دالة متصلة مجالها [١ ، ٧] ، د(١) = -٢ ، د(٥) = ٤

٢- د′(٥) = ٠ ، د′(س) > ٠ عندما س < ٥ ، د′(س) < ٠ عندما س > ٥

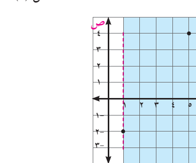
٣- د″(س) < ٠ عندما ١ < س < ٧

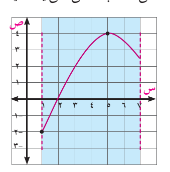
**الحل**

من (١): نرسم محورى الإحداثيات المتعامدة النقطتين (١، -٢) ، (٥، ٤) فى المجال [١، ٧].

من (٢): عند س = ٥ المماس // محور السينات، ود متزايدة على الفترة ]١، ٥[ ومتناقصة على الفترة ]٥، ٧[

من (٣): المنحنى محدب لأعلى على ]١، ٧[





**حاول أن تحل**

٥ ارسم شكلاً عامًّا لمنحنى الدالة د حيث ص = د(س) إذا علمت ما يلى :

١- د متصلة مجالها [٠، ∞[ ، د(٤) = ٣ ، د(٠) = ١ ٢- د′(س) > ٠ عندما س > ٠





٣- د″(س) > ٠ عندما س < ٤ ، د″(٤) = ٠ ، د″(س) < ٠ عندما س > ٤

**مثال**

**حل معادلات**

٦ إذا كانت النقطة (١، ١٢) هى نقطة انقلاب لمنحنى الدالة د حيث د(س) = أس^٣ + ب س^٢ فأوجد قيم أ ، ب الحقيقية.

**الحل**

∵ النقطة (١ ، ١٢) نقطة انقلاب لمنحنى د

∴ د″(١) = ٠ (١) ، د(١) = ١٢ (٢)

د′(س) = ٣أس^٢ + ٢ب س ، د″(س) = ٦أس + ٢ب

من (١): ٦أ + ٢ب = ٠ ∴ ب = -٣أ

من (٢): أ + ب = ١٢ ∴ أ - ٣أ = ١٢ ويكون أ = -٦ ، ب = ١٨

**حاول أن تحل**

٦ إذا كانت النقطة (٢، ٢) هى نقطة انقلاب لمنحنى الدالة د حيث د(س) = س^٣ + أس^٢ + ب س فأوجد قيم أ ، ب الحقيقية.

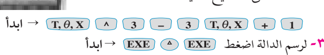
**نشاط**

**استخدام الحاسبة البيانية فى رسم الدوال.**

لاستخدام الحاسبة البيانية فى رسم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^٣ - ٣س + ١ اتبع الخطوات التالية:

١- افتح الحاسبة واضغط MENU ثم تحرك بالأسهم على الشاشة واختر GRAPH، اضغط EXE الذى يعد مفتاح الإدخال لتظهر لك نافذة الكتابة .

٢- اكتب عند Y1 فى نافذة الكتابة الدالة المراد رسمها حيث يستخدم مفتاح لكتابة المتغير X ولذلك اضغط على المفاتيح التالية :




٣- لرسم الدالة اضغط EXE ^ EXE → ابدأ فتظهر النافذة الرسومية كما بالشكل المقابل.

٤- استخدم مفتاح فى النافذة الرسومية لدراسة سلوك الدالة وتحديد فترات التحدب إلى أعلى والتحدب إلى أسفل.

تكنولوجيا: بعض الدوال يصعب رسم منحناها البيانى. يمكنك باستخدام برنامج geogebra أو أى برنامج رسومى آخر رسم منحنى الدالة ودراسة خواصه.

## تمارين (٣ -٣) ص ٨٥

### إجابات التمرين:



أ ) [-٤ ، ٥ ]  ب ) {-٢ ، ٢}

ج ) ]٠ ، ٥ ]  د ) ]-٤ ، ٠ ]

هـ ) (٠ ، ٠)  و ) ٢

ز ) ٨

٢) لا توجد

٣) ]-∞ ، ١ [ التحدب لأعلى

]١ ، ∞ [ التحدب لأسفل ، (١ ، -١) نقطة انقلاب

٤) ]-∞ ، ٢ [ التحدب لأسفل ، ] ٢ ، ∞ [ التحدب لأعلى،

٥) ]-∞ ، $\frac{٢-}{\sqrt{٣}}$ [ التحدب لأسفل ،

]$\frac{٢-}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$[ التحدب لأعلى

]$\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ، ∞ [ التحدب لأسفل

[ $\frac{٢-\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\frac{٦٤}{٩}$ ] ، [ $\frac{٢\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\frac{٦٤}{٩}$ ]

[نقط انقلاب]

٧) $د''(س) = \frac{٦(٣س^٢ = ٤)}{(س^٢ -٤)^٣}$

س = ± ٢ تجعل د″(س) = غير معرفة

مناطق التحدب لأسفل : ]-∞ ، -٢ [ ، ]٢ ، ∞ [

مناطق التحدب إلى أعلى : ]-٢ ، ٢ [

لاتوجد نقط انقلاب

٩) د′(س) = غير معرفة عند س = صفر

د متصلة عند س = ٠

∴ توجد نقطة حرجة

د″(س) = ٦س ، س > ٠

-٢ ، س < ٠

س = صفر تجعل د″(س) = ٠

التحدب لأعلى في: ]-∞ ، ٠ [ ، ] ٠ ، ∞ [،

لاتوجد نقط إنقلاب

١٠) $د'(س) = \frac{١ + س^٢}{(١- س^٢)^٢}$ ،

$د''(س) = \frac{٢س (س^٢ + ٣)}{(١- س^٢)^٣}$

س = ٠ تجعل د″(س) = ٠

رسم المنحنيات ٣ - ٣

**يوضح الشكل المقابل** منحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{(س + ١)^٢}{س^٢ + ١}$ ،

لاحظ:

١) **النقط الحرجة:** للمنحنى نقط حرجة عند س = -١ ، س = ١

عند س = -١  د(-١) = ٠ قيمة صغرى محلية،  عند س = ١  د(١) = ٢ قيمة عظمى محلية.

٢) **فترات التحدب:** إلى أعلى: ]-∞ ، -√٣ [ ، ]٠ ، √٣ [  ،  إلى أسفل: ]-√٣ ، ٠[ ، ]√٣ ، ∞[

٣) **نقطة الانقلاب:** عند س = -√٣ يوجد مماس يقطع منحنى د ، عند س = √٣ يوجد مماس يقطع منحنى د

٤) **الشكل العام للمنحنى:** منحنى الدالة يقترب بطرفيه من المستقيم ص = ١ و يعرف بخط التقارب الأفقي لمنحنى الدالة ومعادلته ص = أ حيث: أ = $\lim_{|س| \to \infty}$ د(س) = $\lim_{|س| \to \infty} \frac{(س + ١)^٢}{س^٢ + ١}$ = ١



تطبيق: ارسم منحنيي الدالتين بأحد البرامج الرسومية ثم ادرس خواص كل منهما:

د(س) = $\frac{٤س^٢}{س^٢ + ٣}$   ر(س) = $\frac{س^٢ - ٤س}{س^٢ - ٤س + ٣}$

### تمارين ٣ – ٣

١) **يبين الشكل المقابل منحنى الدالة د حيث ص = د(س)، اكمل:**

أ ) مجال د = ..................

ب ) د′(س) = ٠ عندما س ∈ ..................

ج ) د″(س) > ٠ عندما س ∈ ..................

د ) المنحنى محدب لأعلى عندما س ∈ ..................

هـ ) للمنحنى نقطة انقلاب هي ..................

و ) للدالة قيمة صغرى محلية عند س = ..................

ز ) للدالة قيمة عظمى مطلقة تساوى ..................

**ابحث فترات تحدب الدالة د ثم أوجد إحداثيات نقط الانقلاب ( إن وجدت) لكل ممايأتى:**

٢) د (س) = ٤ - ٦ س - ٣س^٢  ٣) د(س) = س^٣ - ٣س^٢ + ١

٤) د(س) = ١٥س + ٦ س^٢ - س^٣  ٥) د(س) = س^٤ - ٨س^٢ + ١٦

٦) د(س) = $\frac{٦}{س^٢ + ٣}$  ٧) $\frac{س^٢ - ١}{س^٢ - ٤}$

٨٣  كتاب الطالب – الصف الثالث الثانوى

ميل الماس (عند س = ٠ ) = ١

ظا θ = ١

∴ θ = $\frac{\pi}{٤}$

١١) د′(س) = ٣ س^٢ -١٢س + ٩

س ∈ {١، ٣} عند د′(س) = ٠

د″(س) = ٦س - ١٢

د″(١) = -٦ < ٠ توجد قيمة عظمى محلية

د″(٣) = ٦ > ٠ توجد قيمة صغرى محلية

س = ٢ عند د″(س) = ٠

∴ عند س = ٢ توجد نقطة انقلاب

= $\frac{س_١ + س_٢}{٢}$ = $\frac{١ + ٣}{٢}$ = ٢

= الاحداثى السينى لنقطة الانقلاب.

**١٢** ص = $\frac{\text{- ب + س}^{٢}}{\text{س}^{٢}\text{ + أ}}$ ،

ص َ = $\frac{\text{٢أ ب س}}{(\text{س}^{٢}\text{ + أ})^{٢}}$ (١ ، -١) ∈ للمنحنى

∴ ب - أ = ١ بوضع د ً(١) = صفر

∴ أ = ٣ ، ب = ٤

**من (١٣) إلى (١٦) رسم منحنيات راجع مثال (٥) ص (٨١)**

**٢٤** د َ(س) = $\frac{١}{٨}$ (س - ٢) (٣س + ٦)

بوضع د َ(س) = ٠

∴ س = ٢ أو س = -٢

وتزايدية في ]-∞ . -٢ [ . ] ٢ ، ∞ [

وتناقصية في ] ٢ ، ٢ [

د ً(س) = $\frac{٣}{٤}$ س

س = ٠ تجعل د ً(س) = ٠

التحدب لأعلى في ]-∞ . ٠ [

التحدب لأسفل في ] ٠ ، ∞ [

(-٢ ، ٤ ) عظمى ، (٢، ٠) صغرى

(٠ ، ٢) نقطة إنقلاب.

**٢٥** د َ(س) = غير معرفة عند س = ٠

وتناقصية في ]-∞ ، ٠ [ ، ] ٠ ، ٢ [

وتزايدية في ] ٢ ، ∞ [.

**مناطق التحدب**

التحدب لأعلى في ]٠ . ١ [

التحدب لأسفل في ] ١، ∞ [ ، ] -∞ ، ٠ [

(١، -٢) نقطة الإنقلاب ، ( ٠، ٠ ) نقطة انقلاب

(٢ ، -٤) صغرى محلية

لا توجد قيم عظمى محلية للدالة

سلوك الدالة ورسم المنحنيات

**٨** د(س) = { (س - ٢)$^{٢}$ عندما س < ٤ ؛ ٢٠ - س$^{٢}$ عندما س ⩾ ٤ }

**٩** د(س) = { س$^{٣}$ - ٣س عندما س < ٠ ؛ ٤س - س$^{٢}$ عندما س ⩾ ٠ }

**١٠** أثبت أن قياس زاوية ميل المماس عند نقطة الانقلاب لمنحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{\text{س}}{\text{١ - س}^{٢}}$ يساوى $\frac{\pi}{٤}$

**١١** إذا كان لمنحنى الدالة د حيث د(س) = س ( س - ٣)$^{٢}$ قيمة عظمى محلية عند س$_{١}$ ، وقيمة صغرى محلية عند س$_{٢}$ فأثبت أن الإحداثى السينى لنقطة الانقلاب = $\frac{\text{س}_{١}\text{ + س}_{٢}}{٢}$

**١٢** أوجد أ ، ب بحيث يكون للمنحنى س$^{٢}$ ص + أ ص + ب س$^{٢}$ = ٠ نقطة انقلاب عند النقطة (١ ، -١).

**ارسم الشكل العام لمنحنى الدالة المتصلة د الذى له الخواص المعطاة فى كل مما يأتى:**

**١٣** د(٠) = ٤ د(٣) = ٤ ، د َ(س) < ٠ لكل س < ٢ ، د َ(س) > ٠ لكل س > ٢ ، د ً(س) > ٠

**١٤** د(١) = د(٥) = ٠ ، د َ(س) < ٠ لكل س < ٣ ، د َ(س) > ٠ لكل س > ٣ ، د ً(س) < ٠ لكل س ≠ ٣

**١٥** د(-١) = ٢ د(٠) = ٤ ، د(١) = ٠ ، د َ(-١) = د َ(٠) = ١ ، د ً(س) < ٠ لكل س < ٠ ، د ً(س) > ٠ لكل س > ٠

**١٦** د(٣) = ٤ ، عند س < ٣ فإن د َ(س) > ٠ ، د ً(س) > ٠ وعند س > ٣ فإن د َ(س) < ٠ ، د ً(س) > ٠

**ادرس تغيرات الدالة د وارسم الشكل العام لمنحناها فى كل مما يأتى:**

**١٧** د(س) = س$^{٢}$ - ٦س + ٥

**١٨** د(س) = ٣ - س$^{٢}$

**١٩** د(س) = س$^{٣}$ - ٣س$^{٢}$ + ٣

**٢٠** د(س) = $\frac{١}{٣}$ س$^{٣}$ - س + ٢

**٢١** د(س) = $\frac{١}{٨}$ س$^{٣}$ - $\frac{١}{٢}$ س + ١

**٢٢** د(س) = - س (س - ٣)$^{٢}$

**٢٣** د(س) = ( ٢ - س) ( س + ١)$^{٢}$

**٢٤** د(س) = $\frac{١}{٨}$ ( س + ٤) (س - ٢)$^{٢}$

**٢٥** د(س) = { س$^{٣}$ - ٣س$^{٢}$ عندما س < ٠ ؛ س$^{٢}$ - ٢س عندما س ⩾ ٠ }

**٢٦** د(س) = س |س - ٤|

كتاب الرياضيات البحتة - التفاضل والتكامل ٨٤

# ٣ - ٤

# تطبيقات على القيم العظمى والصغرى

## Applications of Maxima and Minima

### خلفية

يعتمد هذا الدرس اتقان الطالب لمفهوم المشتقة الأولى والثانية للدالة لحل مسائل حياتية تحتاج إلى معرفة القيم العظمى والصغرى، ومعظم هذه المسائل تحتاج إلى ممذجة رياضية في تحويل المسائل الحياتية إلى مسائل رياضية.

### مخرجات تعلم الدرس

**في نهاية هذا الدرس وتنفيذ الأنشطة فيه من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:**

ينمذج مسائل حياتية ولفظية إلى مسائل رياضية .

### مفردات أساسية:

نمذجة رياضية

### المواد التعليمية المستخدمة

السبورة التعليمية - طباشير ملون - آلة حاسبة علمية - برامج رسومية للحاسوب.

### مكان التدريس:

الفصل الدراسي.

### مصادر التعلم

كتاب الطالب من ص (٨٥) إلى ص (٩١).

### تهيئة

ناقش مع طلابك مفهوم النمذجة الرياضية وكيف تستخدم في حل مسائل وتطبيقات على القيم العظمى والصغرى.

### أخطاء شائعة:

**اشر إلى طلابك مفهوم الممذجة المسائل الحياتية إلى مسائل رياضية اتباع ما ياتي:**

١- قراءة المسألة بدقة وتفهم مضمونها



٣ - ٤ تطبيقات على القيم العظمى والصغرى

Applications of Maxima and Minima

**سوف تتعلم**

- النمذجة الرياضية

**المصطلحات الأساسية**

- نمذجة رياضية

*Mathematical Modeling*

**الأدوات المستخدمة**

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية

**النمذجة الرياضية** *Mathematical Modeling*

**إن عملية اتخاذ قرار علمى فى حل أى مشكلة تمر بعدة مراحل تتلخص فى:**

١- تحديد المشكلة (الهدف والإمكانات).

٢- وضع نموذج فكرى أو تصور لأبعاد المشكلة.

٣- إيجاد نموذج علمى مناسب.

٤- حل النموذج واتخاذ القرار.

والنمذجة الرياضية هى صياغة مشكلة ما وفق علاقات رياضية يطلق عليها النموذج الرياضى، **ويتلخص فى المخطط المقابل حيث يتضمن :**

المشكلة
المطلوب والمعطيات
القيود
تحديد المجاهيل
صياغة النموذج الرياضي
حل النموذج
تقيم النتائج وتحديد البدائل

١- تحديد المشكلة المطروحة غايتها ومكوناتها (ربح أعظم - تكلفة أقل - مساحة أكبر ...)

٢- تحديد مجاهيل المسألة التى يجب إيجاد قيمها للوصول إلى الغاية المطلوبة.

٣- بيان العلاقات بين المجاهيل ( معادلات - متباينات).

٤- صياغة النموذج الرياضى وهو تمثيل للمشكلة بصورة رياضية قابلة للحل.

٥- حل النموذج الرياضى وتفسير نتائجه وفق طبيعة المسألة .

٦- تحديد البدائل المتاحة إذا كان للمسألة أكثر من حل واحد.

ويسهم حساب التفاضل فى حل النموذج الرياضى لمعظم مشكلات الحياة العملية حين يكون الهدف هو الحصول على أكبر قيمة أو أصغر قيمة لمتغير ما فى إطار القيم القصوى المحلية والقيم القصوى المطلقة كما فى الأمثلة التالية.

**مثال** — **اختبار المشتقة الأولى**

① أوجد بعدى مستطيل له أكبر مساحة يمكن رسمه داخل مثلث، طول قاعدته ١٦سم وارتفاعه ١٢سم، بحيث ينطبق بأحد أضلاعه على قاعدة المثلث وتقع رأسا الضلع المقابل على الضلعين الآخرين للمثلث.

**الحل**

١- لحساب أكبر مساحة نرسم المسألة تبعًا للمعطيات والقيود .

٢- تحديد المتغيرات (المجاهيل) بفرض أن عرض المستطيل = س سم وطوله ص سم ومساحته = م سم$^2$

٨٥ كتاب الطالب – الصف الثالث الثانوى

٢- تحديد المتغيرات و وضع رموز لها ، ورسم شكل لبيان ذلك (إن امكن).

٣- تحديد المتغير المطلوب إيجاد قيمتة العظمى أو الصغرى وكتابة الصيغة التي تربط هذا المتغير بالمتغيرات الأخرى.

٤- استخدام المعلومات المعطاة في المسألة لاختصار المتغيرات لمتغير واحد مستقل فقط، ومن ثم التعبير عن قيمة المتغير المطلوب بمعادلة تربطه بالمتغير المستقل الوحيد وليكن س.

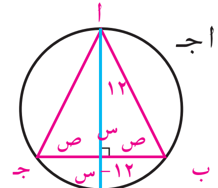
٥- تحديد مجموعة قيم س المحتملة.

٦- إذا كانت مجموعة القيم المحتملة فترة مغلقة نبحث عن القيم الصغرى المحلية أو العظمى المحلية عند النقاط الحرجة والقيم القصوى المطلقة عند أطراف الفترة.

٧ - إذا كانت مجموعة القيم المحتملة فترة مفتوحة نبحث عن النقاط الحرجة ونستخدم احد اختيارات المشتقة الأولى أو الثانية للتأكد ما تؤول اليه القيمة المطلوبة.

## التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

### حلول: حاول أن تحل




(١) △ أ ب جـ متساوى الساقين أ ب = أ جـ

∴ أ ى × ى هـ = ب ى × ى جـ

$ص^{٢} = (١٢ + س)(١٢ - س)$

$ص^{٢} = ١٤٤ - س^{٢}$

مساحة △ أ ب جـ = م $= \frac{١}{٢} \times ٢ ص \times (١٢ + س)$

$م = \sqrt{١٤٤ - س^{٢}} \times (١٢ + س)$

$\frac{ى م}{ى س} = \frac{- س}{\sqrt{١٤٤ - س^{٢}}} \times (١٢ + س) + ١ \times \sqrt{١٤٤ - س^{٢}}$

$= \frac{- ١٢ س - س^{٢} + ١٤٤ - س^{٢}}{\sqrt{١٤٤ - س^{٢}}}$

$صفر = -٢س^{٢} - ١٢ س + ١٤٤$

∴ س = ٦ ∴ ص = $٦\sqrt{٣}$

∵ أ ى = ١٨ ، ب ى = $٦\sqrt{٣}$

∴ اكبر مساحة $= \frac{١}{٢} \times ١٢\sqrt{٣} \times ١٨$

$= ١٠٨\sqrt{٣}$ سم$^{٢}$

**لاحظ أن :**

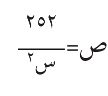
∴ ظا (ب أ ى) $= \frac{٦\sqrt{٣}}{١٨}$ ∴ق(∠ب أ ى) = ٣٠

∴ ق (∠ب أ جـ) = ٦٠

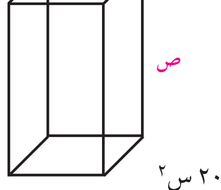
اكبر مساحة لمثلث متساوى الساقين يمكن رسمه داخل دائرة هو مثلث متساوى الأضلاع ابعاده $١٢\sqrt{٣}$

(٢) ابعاد متوازى المستطيلات من الداخل س ، ص، ص

سعة الصندوق = $س^{٢} ص = ٢٥٢$



$ص = \frac{٢٥٢}{س^{٢}}$




المساحة الكلية = $٤ س ص + س^{٢} + س^{٢}$

التكلفة الكلية = $٣٠ \times ٤ س ص + ٥٠ س^{٢} + ٢٠ س^{٢}$

ت $= ١٢٠ س ص + ٧٠ س^{٢}$

$= \frac{١٢٠ \times ٢٥٢}{س} + ٧٠ س^{٢}$

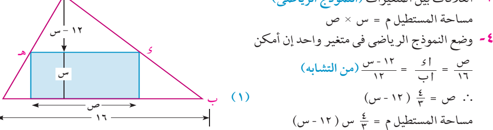
ت′ $= \frac{-١٢٠ \times ٢٥٢}{س^{٢}} + ١٤٠ س$

عند النقط ت′(س) = صفر

∴ $س^{٣} = ٢١٦$ ∴ س = ٦

ص = ٧

ابعاد الصندوق التى تجعل التكلفة صفر مايمكن هى ٦، ٦، ٧سم




٣- العلاقات بين المتغيرات (النموذج الرياضى)

مساحة المستطيل م = س × ص

٤- وضع النموذج الرياضى فى متغير واحد إن أمكن

$\frac{ص}{١٦} = \frac{أ ى}{أ ب} = \frac{١٢ - س}{١٢}$ (من التشابه)

∴ ص = $\frac{٤}{٣}$ (١٢ - س) (١)

مساحة المستطيل م = $\frac{٤}{٣}$ س (١٢ - س)

أى إن: م = د(س) = ١٦ س - $\frac{٤}{٣}$ س$^{٢}$ (٢)

٥- حل النموذج الرياضى: باشتقاق طرفى العلاقة (٢) بالنسبة إلى س

∴ د′(س) = ١٦ - $\frac{٨}{٣}$ س ، د″(س) = - $\frac{٨}{٣}$

عند د′(س) = ٠ ∴ س = $\frac{١٦ \times ٣}{٨}$ = ٦ ويكون عندها د″(س) < ٠

∴ للدالة د نهاية عظمى محلية عند س = ٦ ، ص = $\frac{٤}{٣}$ (١٢ - ٦) = ٨

أى إن: للمستطيل أكبر مساحة عندما يكون بعداه ٦سم ، ٨سم

**حاول أن تحل**

(١) أوجد أكبر مساحة لمثلث متساوى ساقين يمكن رسمه داخل دائرة طول نصف قطرها ١٢سم.

**مثال** حساب أقل تكلفة

(٢) يراد بناء صومعة حبوب على شكل أسطوانة رأسية ذات سقف نصف كُروى بحيث تتسع لتخزين $١٠٨\pi$م$^{٣}$ من الحبوب (بفرض أن تخزين الحبوب يتم فى الجزء الأسطوانى فقط دون السقف)، إذا كانت تكلفة وحدة المساحة من السقف ضعف تكلفة وحدة المساحة من الجدار الجانبى. ما أبعاد الصومعة التى تجعل التكلفة أقل ما يمكن؟

**الحل**

١- لحساب أقل تكلفة نرسم المسألة تبعًا للمعطيات والقيود.

٢- **تحديد المتغيرات:** نفرض أن ارتفاع الأسطوانة = ع مترًا، طول نصف قطر قاعدتها = نق مترًا وأن تكلفة وحدة المساحة من الجدار = جـ جنيهًا فتكون تكلفة وحدة المساحة من السقف = ٢ جـ جنيهًا والتكاليف الكلية = ك جنيهًا.

٣- **العلاقات بين المتغيرات (النمذجة):**

مساحة السطح الأسطوانى = محيط القاعدة × الارتفاع = $٢\pi$ نق ع وحدة مساحة

مساحة السطح النصف كرى = $\frac{١}{٢}$ مساحة الكرة = $٢\pi$ نق$^{٢}$ وحدة مساحة

التكاليف الكلية ك = $٢\pi$ نق ع × جـ + $٢\pi$ نق$^{٢}$ × ٢ جـ = $٢\pi$ نق جـ (ع + ٢نق)





٤- وضع النموذج الرياضى فى متغير واحد:

∵ حجم الجزء الأسطوانى = $١٠٨\pi$ ∴ $\pi$ نق$^{٢}$ع = $١٠٨\pi$ أى إن ع = $\frac{١٠٨}{نق^{٢}}$

التكاليف الكلية ك = $٢\pi$ نق جـ ($\frac{١٠٨}{نق^{٢}}$ + ٢نق)

ك = د(نق) = $٢١٦\pi$ جـ نق$^{-١}$ + $٤\pi$ جـ نق$^{٢}$

٥- حل النموذج: د′(نق) = - $٢١٦\pi$ جـ نق$^{-٢}$ + $٨\pi$ جـ نق

النقط الحرجة = عند د′(نق) = ٠ ∴ نق$^{٣}$ = $\frac{٢١٦}{٨}$ أى إن نق = ٣

اختبار المشتقة الثانية:

∵ د″(نق) = $٤٣٢\pi$ جـ نق$^{-٣}$ + $٨\pi$ جـ ∴ د″(٣) > ٠

أى إن: عندما يكون طول نصف قطر الأسطوانة الرأسية ٣ أمتار يكون للصومعة أقل تكاليف، ويكون ارتفاعها عندئذ $\frac{١٠٨}{٩}$ = ١٢ مترًا.

**حاول أن تحل**

(٢) خزان على شكل صندوق مغلق سعته ٢٥٢ مترًا مكعبًا، وقاعدته مربعة. يراد طلاؤه من الداخل بمادة عازلة، يتكلف القاع ٥٠ جنيهًا لكل متر مربع، ويتكلف الغطاء ٢٠ جنيهًا لكل متر مربع، كما يتكلف الجوانب ٣٠ جنيهًا لكل متر مربع، أوجد أبعاد الصندوق التى تجعل التكلفة أقل ما يمكن.

**مثال** القيم العظمى المطلقة

(٣) تبيع إحدى الشركات س من الوحدات أسبوعيًا من إحدى السلع لها تكلفة ثابتة ٢٥٠٠ جنيه وتكاليف متغيرة ٠,٩ س ، إذا كانت دالة الطلب لهذه السلعة هى ١,٥ - ٠,٠٠٠٠٢ س ولا تسمح طاقة الشركة ببيع أكثر من ٢٠٠٠٠ وحدة اسبوعيًا، فأوجد أقصى ربح ممكن.

**الحل**

مطلوب أقصى ربح ممكن عند بيع س وحدة حيث ٠ ≥ س ≥ ٢٠٠٠٠

**نمذجة المشكلة:**

دالة الدخل = عدد الوحدات × دالة الطلب ∴ د(س) = س (١,٥ - ٠,٠٠٠٠٢ س)

دالة التكلفة = التكاليف الثابتة + التكاليف المتغيرة ∴ ك(س) = ٢٥٠٠ + ٠,٩ س

دالة الربح ر(س) = د(س) - ك(س) عند بيع س وحدة

ر(س) = - ٠,٠٠٠٠٢ س$^{٢}$ + ٠,٦ س - ٢٥٠٠ (١)

حل النموذج ر′(س) = -٠,٠٠٠٠٤ س + ٠,٦

عند النقط الحرجة ر′(س) = ٠ ∴ س = $\frac{٠,٦}{٠,٠٠٠٠٤}$ = ١٥٠٠٠

اختبار المشتقة الثانية ر″(س) = -٠,٠٠٠٠٤ ∴ ر″(١٥٠٠٠) < ٠

حيث إن المشتقة الثانية سالبة فإن بيع ١٥٠٠٠ وحدة أسبوعيًا يحقق أقصى ربح

**بالتعويض فى** (١) حيث س = ١٥٠٠٠ وحدة

∴ أقصى ربح أسبوعى = ٢٠٠٠ جنيه (قيمة عظمى محلية عند س = ١٥٠٠٠)



## تفكير ناقد ص (٩٠)

الإيراد الحدى > التكلفة الحدية عند مستوى الانتاج

### حاول أن تحل (٣)

دالة الدخل = س ص = ١٠٠ س - ٠,٠٢ س٢

دالة الربح = دالة الدخل - دالة التكاليف الكلية

ر(س) = ١٠٠ س - ٠,٠٢ س٢ - ٤٠ س - ١٥٠٠٠

ر/(س) = ١٠٠ - ٠,٠٤ س - ٤٠

عند النقطة الحرجة ر/(س) = ٠

س = ١٥٠٠ وحدة

عدد الوحدات المبيعة يوميًا لتحقيق اكبر ربح ممكن هى ١٥٠٠ وحدة

### حاول ان تحل (٤) ص ٨٩

(٠، أ)
(٣، ٢)
و
(ب، ٠)

ميل الخط المستقيم = $\frac{-\text{أ}}{\text{ب}}$

م المثلث المذكور = $\frac{1}{2}$ أ ب

معادلة المستقيم = $\frac{\text{ص} - \text{أ}}{\text{س}} = \frac{-\text{أ}}{\text{ب}}$

النقطة (٣، ٢) تنتمى للمستقيم

∴ $\frac{2 - \text{أ}}{3} = \frac{-\text{أ}}{\text{ب}}$

ب = $\frac{-3\text{أ}}{2 - \text{أ}}$ ∴ م = $\frac{1}{2} \times \frac{-3\text{أ}}{2 - \text{أ}} \times$ أ

م = $\frac{-3}{2} \times \frac{\text{أ}^2}{2 - \text{أ}}$

$\frac{\text{ءم}}{\text{ءأ}} = \frac{-3}{2} \left[ \frac{(2 - \text{أ}) \times 2\text{أ} - \text{أ}^2 \times -1}{(2 - \text{أ})^2} \right]$

عند النقطة الحرجة $\frac{\text{ءم}}{\text{ءأ}}$ = صفر

٤ أ - ٢ أ + أ٢ = صفر

٤أ - أ٢ = صفر        أ = ٠        مرفوض

**أو** : أ = ٤        ∴ ب = $\frac{-12}{2-4}$ = ٦

م △ المذكور = $\frac{1}{2}$ × ٤ × ٦ = ١٢ وحدةمربعة

### حاول أن تحل (٥) ص ٩٠

ص = ٢ س - ٠,٢ س - ٠,٠٠٠٥ س٢

$\frac{\text{ءس}}{\text{ءص}}$ = ٠,٢ - ٠,٠٠٠٥ × ٢ س

س = ٢٠٠

تعداد المجتمع = ٢٠

سلوك الدالة ورسم المنحنيات

**لاحظ أن:** الشركة يمكنها إنتاج ٢٠٠٠٠ وحدة أسبوعيًا بالتعويض فى (١)

∴ ربح ٢٠٠٠٠ وحدة = ١٥٠٠ جنيهًا

∴ أقصى ربح أسبوعى = ٢٠٠٠ جنيه (قيمة عظمى مطلقة ٠ ⩽ س ⩽ ٢٠٠٠)

**تفكير ناقد:** ما العلاقة بين الإيراد الحدى والتكلفة الحدية عند مستوى الناتج الذى يحقق أكبر ربح ممكن؟

**حاول أن تحل**

(٣) إذا كانت دالة الطلب لإحدى السلع تُعطى بالعلاقة ص = ١٠٠ - ٠,٠٢ س جنيهًا حيث س، عدد الوحدات المنتجة من هذه السلعة فى اليوم الواحد. وكانت التكاليف الكلية لإنتاج وبيع س وحدة منها هى د(س) = ٤٠ س + ١٥٠٠٠ جنيه فى اليوم الواحد ، فكم عدد الوحدات المبيعة يوميًا لتحقيق أكبر ربح ممكن؟

**مثال** تطبيقات حياتية

(٤) جدار ارتفاعه ٢ متر و يبعد مترين عن أحد المنازل، أوجد طول أقصر سلم يصل من الأرض إلى المنزل مرتكزًا على الجدار.

**الحل**

١- لحساب أقصر طول للسلم نرسم المسألة تبعًا للمعطيات والقيود.

٢- **تحديد المتغيرات:** نفرض أن:

طول السلم = ل مترًا، ارتفاع قمة السلم عن الأرض = ص مترًا، بعد طرف السلم السفلى عن الجدار = س مترًا.

٣- **نمذجة المسألة:**

ل
ص
٢م
٢متر
س

من فيثاغورث: ل٢ = (س + ٢)٢ + ص٢        (١)

من التشابه: $\frac{\text{ص}}{2} = \frac{\text{س} + 2}{\text{س}}$

∴ ص = $\frac{2\text{س} + 4}{\text{س}}$ = ٢ + ٤ س-١        (٢)

لإيجاد أقصر طول للسلم يكفى أن تكون ل٢ قيمة صغرى

٤- **حل النموذج باشتقاق طرفى العلاقة (١)، (٢) بالنسبة إلى س.**

∴ $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$(ل٢) = ٢ (س + ٢) × ١ + ٢ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-4}{\text{س}^2}$

∴ $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$(ل٢) = ٢ (س + ٢) + ٢$\left(\frac{2\text{س}+4}{\text{س}}\right) \times \frac{-4}{\text{س}^2}$ = ٢ (س + ٢) $\left(1 - \frac{8}{\text{س}^3}\right)$



| س | ٢ | |
|---|---|---|
| إشارة $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$(ل٢) | − | + |
| ل٢ | ↘ | ↗ |

**عند النقط الحرجة:** $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$(ل٢) = صفر

∴ س = -٢ مرفوض    أو    $\frac{8}{\text{س}^3}$ = ١

∴ س = ٢

من اختبار المشتقة الأولى للتزايد والتناقص نلاحظ تغير إشارة $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$(ل٢) من - إلى +

∴ عند س = ٢ تكون ل٢ أصغر ما يمكن

بالتعويض فى (٢) ∴ ص = $\frac{2 \times 2 + 4}{2}$ = ٤

٨٨    كتاب الرياضيات البحتة - التفاضل والتكامل

### حاول أن تحل (٦)

محيط القطاع **٢نق + ل = ١٢**

مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ ل نق

م = $\frac{1}{2}$ (١٢ - ٢ نق) × نق = ٦نق - نق٢

$\frac{\text{ءم}}{\text{ءنق}}$ = ٦ - ٢نق

عند النقطة الحرجة $\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}}$ = صفر

∴ **نق = ٣**

∴ ل = ٦

∴ قياس زاوية القطاع الذى يجعل المساحة اكبر مايمكن

هـ ء = $\frac{\text{ل}}{\text{نق}} = \frac{6}{3}$ = ٢ء



## تمارين (٣ - ٤) ص ٩٢

(١) العددان س ، ٣٠ - س

حاصل ضربهما ص

∴ ص = ٣٠ س - $س^٢$

ص$'$ = ٣٠ - ٢ س ∴ ص$'$ = ٠

س = ١٥

العددان هما ١٥، ١٥

(٣) العدد س

س + $\frac{١}{س}$ = ص

١ - $\frac{١}{س^٢}$ = $\frac{ءص}{ءس}$ عند $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

∴ $س^٢$ = ١     **أى أن:** س = ١ أو س = -١

∴ العدد الموجب هو الواحد

(٤) ابعاد المستطيل هى س ، ص



س + ص = ٦٠

مساحة المستطيل = $\frac{١}{٢}$ س ص

= $\frac{١}{٢}$ س (٦٠ - س)

م = ٣٠ س - $\frac{١}{٢}$ $س^٢$

$\frac{ءم}{ءس}$ = ٣٠ - س

س = ٣٠     ∴ ص = ٣٠

ابعاد المستطيل هى ٣٠، ٣٠

(٥) محيط القطاع ٢ نق + ل = ٣٠

م = $\frac{١}{٢}$ ل نق

= $\frac{١}{٢}$ نق (٣٠ - ٢ نق)

م = ١٥ نق - $نق^٢$

$\frac{ءم}{ءن}$ = ١٥ - ٢ نق = ٠

نق = $\frac{١}{٢}$ ٧

ل = ١٥

(٨) ابعاد الحقل س ، ص



س + ٢ ص = ٨٠٠ متر

م الحقل = س × ص

= ص (٨٠٠ - ٢ ص) = ٨٠٠ ص - ٢ $ص^٢$

$\frac{ءم}{ءص}$ = ٨٠٠ - ٤ ص عند $\frac{ءم}{ءص}$ = ٠ ∴ ص = ٢٠٠ متر

س + ٤٠٠ = ٨٠٠

س = ٤٠٠ متر

مساحة الأرض = ٤٠٠ × ٢٠٠ = ٨٠٠٠٠ متر$^٢$



**بالتعويض فى (١)**

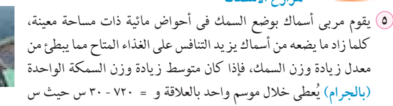
∴ $ل^٢$ = $(٢ + ٢)^٢ + (٤)^٢$ = ٣٢     ∴ل = ٤ $\sqrt{٢}$

**أى إن:** طول أقصر سلم يصل من الأرض إلى المنزل يساوى ٤ $\sqrt{٢}$ مترًا

**حاول أن تحل**

(٤) فى مستوى إحداثى متعامد رسم $\overleftrightarrow{أب}$ يمر بالنقطة جـ (٣ ، ٢) و يقطع محورى الإحداثيات فى النقطة أ والنقطة ب ، أثبت أن أصغر مساحة للمثلث أ و ب تساوى ١٢ وحدة مربعة حيث و نقطة الأصل (٠، ٠).

**مثال** مزارع الأسماك



(٥) يقوم مربى أسماك بوضع السمك فى أحواض مائية ذات مساحة معينة، كلما زاد ما يضعه من أسماك يزيد التنافس على الغذاء المتاح مما يبطئ من معدل زيادة وزن السمك، فإذا كان متوسط زيادة وزن السمكة الواحدة (بالجرام) يُعطى خلال موسم واحد بالعلاقة و = ٧٢٠ - ٣٠ س حيث س عدد الأسماك فى وحدة مساحة من الماء، أوجد قيمة س التى تؤدى إلى أكبر زيادة ممكنة فى وزن السمك.

**الحل**

**نمذجة المسألة:**

∵ الزيادة فى وزن كل سمكة هى و = ٧٢٠ - ٣٠ س ، عدد الأسماك س

∴ الزيادة الكلية فى الوزن ك = و × س = س ( ٧٢٠ - ٣٠ س)

**أى إن:** ك = د(س) = ٧٢٠ س - ٣٠ $س^٢$

المطلوب قيمة س عندما ك أكبر ما يمكن أى للدالة د قيمة عظمى.

**حل النموذج:**

د$'$(س) = ٧٢٠ - ٦٠ س     د$''$(س) = -٦٠ < ٠ دائمًا

عندما د$'$(س) = ٠     س = $\frac{٧٢٠}{٦٠}$ = ١٢ ، د$''$(س) < ٠

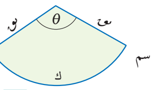
∴ وجود ١٢ سمكة فى كل وحدة مساحة من الماء يؤدى إلى أكبر زيادة ممكنة فى وزن السمك.

**حاول أن تحل**

(٥) يُعطى معدل النمو ص لمجتمع ما تعداده س بالعلاقة ص = ٠,٢ س - ٠,٠٠٠٥ $س^٢$ ، حيث يُقاس الزمن بالأيام. كم تعداد المجتمع الذى يكون معدل النمو عنده قيمة عظمى؟ وما المعدل اليومى للنمو حينئذ؟

**مثال** القطاع الدائرى

(٦) قطعة معدنية على شكل قطاع دائرى مساحته ١٦سم$^٢$ أوجد طول نصف قطر دائرة القطاع الذى يجعل محيطه أقل ما يمكن، وما قياس زاويته عندئذ؟




**الحل**

بفرض أن طول قوس القطاع ل سم ، طول نصف قطر دائرة القطاع = نق سم

∴ محيط القطاع ع = ٢ نق + ل     (١)





∵ مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ ل نق = ١٦     ∴ ل = $\frac{٣٢}{نق}$     (٢)

**بالتعويض فى (١)** ∴ ع = ٢ نق + $\frac{٣٢}{نق}$

باشتقاق طرفى العلاقة (٢) بالنسبة إلى نق

$\frac{ءع}{ءنق}$ = ٢ - $\frac{٣٢}{نق^٢}$ ، $\frac{ء^٢ع}{ءنق^٢}$ = $\frac{٦٤}{نق^٣}$

عندما $\frac{ءع}{ءنق}$ = ٠     نق = ٤ ، $\frac{ء^٢ع}{ءنق^٢}$ > ٠

∴ عند نق = ٤ يكون محيط القطاع أقل ما يمكن

∵ مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ $نق^٢$ θ$^ء$     ∴ θ = $\frac{١٦ \times ٢}{٤ \times ٤}$ = ٢ء

**حاول أن تحل**

(٦) إذا كان محيط قطاع دائرى = ١٢سم، أوجد قياس زاوية القطاع الذى يجعل مساحته أكبر ما يمكن.

### تمـــاريـن ٣ – ٤

(١) عددان مجموعهما ٣٠ وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن، أوجد العددين.

(٢) عددان صحيحان موجبان مجموعهما م، ومجموع مكعب أحدهما وضعف مربع الآخر أصغر ما يمكن، أوجد العددين.

(٣) أوجد العدد الموجب الذى إذا أضيف إليه معكوسه الضربى كان الناتج أصغر ما يمكن.

(٤) أوجد أكبر مساحة من الأرض مستطيلة الشكل يمكن أن تُحاط بسياج طوله ١٢٠ مترًا.

(٥) قطاع دائرى محيطه ٣٠سم، ومساحته أكبر ما يمكن، أوجد طول نصف قطر دائرته.

(٦) علبة على هيئة متوازى مستطيلات، قاعدتها مربعة الشكل . إذا كان مجموع جميع أحرفها يساوى ٢٤٠سم، فأوجد أبعادها حتى يصير حجمها أكبر ما يمكن.

(٧) إذا كان طول وتر مثلث قائم الزاوية يساوى ١٠سم، فأوجد طول كل من ضلعى القائمة عندما تصبح مساحة المثلث أكبر ما يمكن.

(٨) حقل مفتوح يحدُّه من أحد الجوانب نهر مستقيم . حدد كيفية وضع سياج حول الجوانب الأخرى من قطعة أرض مستطيلة من الحقل للإحاطة بأكبر مساحة ممكنة بواسطة ٨٠٠ متر من السياج، وما مساحة هذه الأرض حينئذ؟

(٩) تُصَنْع علب أسطوانية الشكل مغلقة لتعبئة المشروبات، سعة كل منهما ك من وحدات الحجم بأقل قدر من المادة ، أوجد نسبة ارتفاع العلبة (ع) إلى طول نصف قطر قاعدتها (نق).

**(٩)** $ك = \pi نق^٢ ع$

المساحة الكلية للاسطوانة تمثل كمية المادة م

$م = ٢\pi نق^٢$

$م = ٢\pi نق^٢ + ٢\pi نق \times \frac{ك}{\pi نق^٢}$

$م = ٢\pi نق^٢ + \frac{٢ك}{نق}$

$\frac{دم}{دنق} = ٤\pi نق - \frac{٢ك}{نق^٢}$

$\frac{٤\pi نق^٣ - ٢ك}{نق^٢} = صفر$

$٤\pi نق^٣ - ٢ك = ٠$

$٤\pi نق^٣ - ٢\pi نق^٢ ع = صفر$

$٤\pi نق^٣ = ٢\pi نق^٢ ع$

$\frac{ع}{نق} = \frac{٢}{١}$

**(١١)** $(أد)^٢ = س(٣٠ - س)$

$ص^٢ = ٣٠ س - س^٢$

$ص = \sqrt{٣٠ س - س^٢}$

$ص' = \frac{١}{٢}\left(\sqrt{٣٠ س - س^٢}\right)^{-١} \times (٣٠ - ٢س)$

∴ س = ١٥ عند النقطة الحرجة

$ص^٢ = ١٥ \times ١٥ = ٢٢٥$ ∴ ص = ١٥

$أب = ١٥\sqrt{٢}$ ، $أجـ = ١٥\sqrt{٢}$

أ ، س ، ص ، جـ ، س ، ٣٠ − س ، ب

**(١٢)** الربح = د(س) − ك(س)

$ر(س) = -٦س^٢ - ٢س^٣ + ٧٢٠ س - ١٥٠$

$ر'(س) = -١٢ س - ٦س^٢ + ٧٢٠$

$-٦س^٢ - ١٢ س + ٧٢٠ = صفر$

**س = ١٠**

اكبر ربح ر(س) = −٦ × ١٠٠ − ٢ × ١٠٠٠ + ٧٢٠ × ١٠ − ١٥٠

= ٤٤٥٠ جنيهاً

**(١٣)** دالة الربح ر(س) = دالة الدخل − دالة التكاليف

ر(ر) = س (٢٠٠ − ٠,١ س) − (٥٠ س + ٢٠٠)

$= ١٥٠ س - ٠,١ س^٢ - ٢٠٠٠$

ر'(س) = ١٥٠ − ٠,٢ س      ∴ ر'(س) = ٠

س = ٧٥٠

قيمة الربح = ٥٤٢٥٠ جنيهًا


تطبيقات على القيم العظمى والصغرى ٣ - ٤

(١٠) ملعب على شكل مستطيل ينتهى بنصفى دائرتين، إذا كان محيط الملعب ٤٢٠ مترًا، فأوجد أكبر مساحة له.

(١١) مثلث قائم الزاوية طول وتره ٣٠سم ، أوجد طول كل من ضلعيه الآخرين إذا كان طول العمود النازل من رأس الزاوية القائمة على الوتر أكبر ما يمكن.

(١٢) إذا كانت د دالة الإيراد الكلى ، ك دالة التكلفة الكلية، احسب أكبر ربح ممكن لكل مما يأتى:
أ د(س) = ٨٠٠ س − ٧س^٢، ك(س) = ٢س^٣ − س^٢ + ٨٠ س + ١٥٠
ب د(س) = ٤٤٠ س − ٣س^٢، ك(س) = ١٤ س + ٢٢٥

(١٣) إذا كانت دالة الطلب لمنتج أحد المصانع تُعطى بالعلاقة ص = ٢٠٠ − ٠,١ س جنيهًا، حيث س عدد الوحدات المنتجة أسبوعيًّا، وكانت التكاليف الكلية الأسبوعية لبيع س وحدة منها هى ك(س) = ٥٠ س + ٢٠٠٠ جنيه أوجد الإنتاج الأسبوعى الذى يحقق أكبر ربح ممكن، وما قيمة هذا الربح؟

(١٤) قطعة من الورق المقوى على شكل مستطيل، بعداه ١٥سم ، ٢٤سم، قُطعَ من أركانها الأربعة مربعات متطابقة، طول ضلع كل منها س سم، ثم ثُنيت الأجزاء البارزة لأعلى لتكون علبة بدون غطاء . احسب أبعاد العلبة عندما يكون لها أكبر حجم ممكن.

(١٥) خزان مفتوح، قاعدته مربعة، وجوانبه رأسية، يسع كمية معينة من الماء . أثبت أن تكاليف طلاء الخزان من الداخل بطبقة منتظمة عازلة تكون أقل ما يمكن إذا كان عمقه يساوى نصف طول ضلع قاعدته.

(١٦) أوجد أقرب نقطة إلى النقطة (٠، ٥) وتقع على المنحنى ص = ½ س^٢ − ٤ .

(١٧) أوجد أقصر بعد بين المستقيم س − ٢ص + ١٠ = ٠ والمنحنى ص^٢ = ٤س .

(١٨) أ ب جـ مثلث حيث أَ ، بَ ثابتان . أوجد قياس الزاوية المحصورة بينهما والتى تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن.

(١٩) تُعطى شدة التيار ت (بالأمبير) فى دائرة للتيار المتردد عند أى لحظة ن (ثانية) بالعلاقة ت = ٢ جتا ن + ٢ جا ن، ما أقصى قيمة للتيار فى هذه الدائرة.

(٢٠) ينمو حجم مزرعة بكتيريا موضوعة فى وسط غذائى طبقًا للعلاقة د(ن) = ٢٠٠٠ + ٥٠٠٠ ن / (١٠٠ + ن^٢) ، حيث الزمن ن مقيس بالساعات ، عين القيمة العظمى لحجم المزرعة.

(٢١) أ ب جـ ى مربع طول ضلعه ١٠سم ، م ∈ ب جـ بحيث ب م = س سم ، ن ∈ جـ ى بحيث جـ ن = ٣/٢ س . أوجد قيمة س التى تجعل مساحة △ أ م ن أصغر ما يمكن.

(٢٢) أ ب قطر فى دائرة طول نصف قطرها نق رُسم مماسان للدائرة عند كل من أ ، ب من النقطة هـ على الدائرة رسم مماس آخر للدائرة قطع المماسين السابقين من ى ، جـ على الترتيب . أثبت أن مساحة شبه المنحرف أ ب جـ ى لا تزيد عن ٢نق^٢ وحدة مربعة.

٩١ كتاب الطالب – الصف الثالث الثانوى


**(١٤)** أبعاد العلبة ١٥ − ٢س ، ٢٤ − ٢ س ، س

حجم العلبة ص = (١٥ − ٢س) (٢٤ − ٢س) (س)

$ص' = ١٢ س^٢ - ١٥٦ س + ١٥ \times ٢٤$

ص' = صفر

∴ س = ١٠ مرفوض

س = ٣

ابعاد العلبة ٩، ١٨، ٣

٢٤ س − ٢ س ، س ، س ، ١٥ س − ٢ س

**(١٥)** ابعاد الخزان س ، س ، ص

$ح = س^٢ ص$ ، أ ثمن متر الطلاء

تكاليف الطلاء = (دهان المساحة الكلية) × أ

$ت = (س^٢ + ٤ س ص) \times أ$      حيث أ ثابت

$ت = أ(س^٢ + ٤س \times \frac{ح}{س^٢})$

$ت = أ(س^٢ + \frac{٤ح}{س})$      ∴ ب

$\frac{دت}{دس} = أ(٢ س - \frac{٤ح}{س^٢})$      $∴ ٢س^٣ - ٤ ح = ٠$

$س^٣ = ٢ ح$      $∴ س^٣ = ٢ س^٢ ص$

س = ٢ص

## تمارين عامة

**اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:**

١) إذا كان د: [-٢، ٤] ⟵ ع ، د(س) = س$^٣$ - ٣س فإن عدد النقط الحرجة للدالة د يساوى:
أ) ٠ ب) ١ جـ) ٢ د) ٣

٢) يكون للدالة د قيمة صغرى محلية إذا كانت د(س) تساوى:
أ) ٢ س -١ ب) س$^٢$ + ١ جـ) س$^٣$ د) - س$^٣$

٣) منحنى الدالة د محدبًا لأسفل فى ع إذا كان د(س) تساوى:
أ) ٣ - س$^٢$ ب) ٣ - س$^٣$ جـ) ٣ - س$^٤$ د) ٣ + س$^٤$

٤) إذا كان لمنحنى الدالة د نقطة إنقلاب عند س = ٢ حيث د(س) = س$^٣$ + ك س$^٢$ + ٤ فإن قيمة ك تساوى:
أ) -٦ ب) -٣ جـ) ٣ د) ٦

٥) يكون للدالة د قيمة عظمى محلية إذا كانت د(س) تساوى:
أ) س$^٢$ - ٢ ب) س$^٣$ + ١ جـ) س$^٣$ + ٣س د) س$^٤$ - ٢س$^٢$

**حدد فترات تزايد وفترات تناقص الدالة د فى كل مما يأتى:**

٦) د(س) = (س - ٣)$^٢$ ٧) د(س) = ٢س$^٣$ - س$^٢$ ٨) د(س) = (س + ٤)$^٣$
٩) د(س) = ٥ + ٤ س - س$^٢$ ١٠) د(س) = س$^٢$ (س - ٢) ١١) د(س) = س$^٤$ - ٤س$^٣$
١٢) د(س) = ١ + $\frac{١}{س}$ ١٣) د(س) = $\frac{س}{س + ٢}$ ١٤) د(س) = $\sqrt[٣]{س - ١}$

**حدد فترات التحدب لأسفل والتحدب لأعلى ونقط الانقلاب إن وجدت لكل من:**

١٥) د(س) = (س - ١)$^٢$ ١٦) د(س) = س$^٣$ - ٣س$^٢$ ١٧) د(س) = س$^٣$ - ٦س$^٢$ + ٩
١٨) د(س) = ٦س$^٣$ - س$^٤$ ١٩) د(س) = س$^٢$ - $\frac{٨}{س}$ ٢٠) د(س) = س$^٣$ - ١٢س + ٧

**أوجد القيم القصوى المحلية للدالة د إن وجدت فى كل مما يأتى:**

٢١) د(س) = ٤ - ٦س - س$^٢$ ٢٢) د(س) = ٢س$^٣$ - ٣س$^٢$ + ٧ ٢٣) د(س) = س(س - ٢)$^٢$
٢٤) د(س) = س$^٤$ - ٨س$^٢$ + ٨ ٢٥) د(س) = $\frac{س^٢ - ١}{س^٢ + ١}$ ٢٦) د(س) = $\frac{س^٢ - ٣}{س - ٢}$
٢٧) د(س) = $\frac{س - ٤}{س^٢ + ٩}$ ٢٨) د(س) = $\sqrt[٣]{(س - ٢)^٢}$ ٢٩) د(س) = $\sqrt[٣]{س^٢ - ٤}$

**أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة د فى الفترة المعطاه لكل مما يأتى:**

٣٠) د(س) = س$^٣$ - ٩ [٠ ، ٢] ٣١) د(س) = س$^٣$ - ١٢ س + ١٦ [-٣ ، ٥]
٣٢) د(س) = س$^٤$ + ٢ [-١ ، ٢] ٣٣) د(س) = ٢س$^٤$ - س$^٢$ + ١ [-١ ، ١]

٩٤ كتاب الرياضيات البحتة – التفاضل والتكامل

---

١٧) نفرض النقطة (أ ، ب) على المنحنى

∴ ب$^٢$ = ٤أ

ع = $\frac{|أ - ٢ب + ١٠|}{\sqrt{١ + ٤}}$ ع = $\frac{|\frac{ب^٢}{٤} - ٢ب + ١٠|}{\sqrt{٥}}$

ع = $\frac{|ب^٢ - ٨ب + ٤٠|}{٤\sqrt{٥}}$

٨٠ ع$^٢$ = (ب$^٢$ - ٨ب + ٤٠)$^٢$

٨٠ × ٢ ع × $\frac{دع}{دب}$ = ٢ (ب$^٢$ - ٨ب + ٤٠) (٢ب - ٨)

∴ أ = ٤ ، ب = ٤ النقطة (٤ ، ٤)

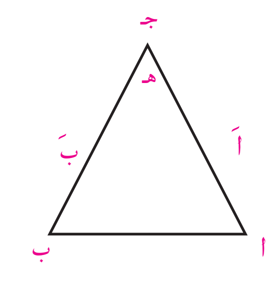
١٨) م △ أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ أَ بَ جا هـ

$\frac{دأ}{دهـ}$ = $\frac{١}{٢}$ أَ بَ جتا هـ

عند النقطة الحرجة جتا هـ = صفر

هـ = ٩٠°

قياس الزاوية المحصورة التى تجعل مساحة المثلث اكبر مايمكن هى ٩٠°




١٩) ت = ٢ جتا ن + ٢ جا ن

$\frac{دت}{دهـ}$ = - ٢جا ن + ٢ جتا ن = صفر

ظا ن = ١ ∴ ن = $\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{٥\pi}{٤}$

ت = ٢ جتا $\frac{\pi}{٤}$ + ٢ جا $\frac{\pi}{٤}$ = ٢$\sqrt{٢}$

٢٠) د(ن) = $\frac{(١٠٠ + ن^٢) \times ٥٠٠٠ - ٥٠٠٠ ن \times ٢ ن}{(١٠٠ + ن^٢)^٢}$

عند النقطة الحرجة د(ن) = ٠ ن = ١٠ ساعة

القيمة العظمى لحجم المزرعة = ٢٠٠٠ + $\frac{٥٠٠٠ \times ١٠}{١٠٠ + ١٠٠}$

= ٢٢٥٠

## تمارين عامة

١) جـ ٢) ب ٣) د ٤) أ ٥) د

١١) د(س) = س$^٤$ - ٤س$^٣$

دَ(س) = ٤س$^٣$ - ١٢ س$^٢$ صفر = ٤س$^٢$ (س -٣)

س = صفر ، س = ٣ تناقصية على ]-∞، ٣[

تزايدية على ]٣ ، ∞[

١٣) د(س) = $\frac{س}{س + ٢}$ دَ(س) = $\frac{(س+٢) - س \times ١}{(س + ٢)^٢}$

= $\frac{٢}{(س + ٢)^٢}$ > صفر الدالة متزايدة دومًا

١٤) د(س) = (س -١)$^{\frac{١}{٣}}$ المجال ع

دَ(س) = $\frac{١}{٣}$ (س -١)$^{-\frac{٢}{٣}}$ × ١

= $\frac{١}{٣\sqrt[٣]{(س-١)^٢}}$ > صفر الدالة متزايدة دومًا

١٧) التحدب لأعلى على ]-∞، ٢[

التحدب لأسفل على ]٢ ، ∞[

١٩) التحدب لأسفل على ]-∞ ، ٠[ ، ]٢ ، ∞[

التحدب لأعلى على ]٠ ، ٢[

٣٥) د(٠) = -١ × ٤ = -٤

د(٥) = ٤ × ٩ = ٣٦

دَ(س) = (س$^٢$ - ٤س + ٤) + (س -١) × ٢ (س -٢)

دَ(س) = صفر ∴ س = ٢ ، $\frac{٤}{٣}$

د(٢) = صفر د($\frac{٤}{٣}$) = $\frac{٤}{٢٧}$

قيم ص = {-٤، ٣٦}

القيمة الصغرى المحلية = -٤

القيمة العظمى المحلية = ٣٦

**٣٦** د(-٣) = -٥٤ ، د(٣) = ٣

د/(س) = { ٣س$^{2}$ - ٦س  س > صفر ؛ غيرمعرفة  س = ٠ ؛ ٢س - ٢  س < ٠ }

بوضع د/(س) = صفر

| عندما س > صفر | عندما س < ٠ |
|---|---|
| ٣س ( س - ٢) = ٠ | ٢س - ٢ = ٠ |
| س = صفر ، س = ٢ مرفوض | ∴ س = ١ |
| لايوجد قيم قصوى محلية | قيم قصوى محلية = د(١) |
| | د(١) = ١ - ٢ = -١ |

القيم العظمى المطلقة = ٣    القيم الصغرى المطلقة = -٥٤

**٤٤** د(س) = $\frac{1}{3}$ س$^{3}$ - ٤س + $\frac{1}{3}$

د/(س) = س$^{2}$ - ٤ = (س - ٢) (س + ٢)

د(٢) = -٥ ، د( -٢) = $\frac{17}{3}$ = ٥ $\frac{2}{3}$

د//(س) = ٢ س    د//(س) = صفر

∴ س = صفر    د(٠) = $\frac{1}{3}$

تزايدية فى : ]-∞ ، -٢[ ، ]٢ ، ∞[

تناقصية فى ]-٢ ، ٢[

**٤٧** (٠ ، ٦)∈ للمنحنى ، (١ ، ٥)∈ للمنحنى

∴ ء = ٦    (١)

∴ ٥ = أ + ب + جـ + ٦

أ + ب + جـ = -١    (٢)

∴ للمنحنى قيمة عظمى محلية عند (٠ ، ٦) د/(٠) = صفر

للمنحنى قيمة صغرى محلية عند (١ ، ٥) د/(١) = صفر

د/(س) = ٣ أ س$^{2}$ + ٢ ب س + جـ

جـ = صفر

٣ أ + ٢ ب = صفر    أ = ٢    أ + ب = -١    ب = -٣

ص = ٢ س$^{3}$ - ٣س$^{2}$ + ٦

ص/ = ٦س$^{2}$ - ٦س ، ص// = ١٢ س - ٦

**٤٨** ابعاد المستطيل س ، ص

س + ص = ١٠

م = س ص = س ( ١٠ - س)

م = ١٠ س - س$^{2}$ : $\frac{ءم}{ءس}$ = ١٠ - ٢س

عند النقطة الحرجة $\frac{ءم}{ءس}$ = صفر  ∴ س = ٥ ، ص = ٥

**٣٤** د(س) = س(س$^{2}$ - ١٢)  [-١ ، ٤]    **٣٥** د(س) = (س - ١) (س - ٢)$^{2}$  [٠ ، ٥]

**٣٦** د(س) = { س$^{3}$ - ٣س$^{2}$ عندما س ⩾ ٠ ؛ س$^{2}$ - ٢س عندما س > ٠ }  [-٣، ٣]

**ارسم الشكل العام لمنحنى الدالة المتصلة د الذى له الخواص المعطاة فى كل مما يأتى:**

**٣٧** د (٤) = ٣ ، د/ (٤) = ٠ ، د// (س) < ٠ لجميع قيم س.

**٣٨** د (٢) = ٥ ، د/ (٢) = ٠ ، د// (س) > ٠ عندما س < ٢ ، د//(س) < ٠ عندما س > ٢

**٣٩** د (-٣) = ٨ ، د( ٠) = ٤ ، د (٣) = ٠ ، د/(س) > ٠ عندما س < -٣ وعندما س > ٣،
د//(س) < ٠ عندما س < ٠ ، د//(س) > ٠ عندما س > ٠

**٤٠** د (٠) = ٣ ، د/(٢) = د/(-٢) = ٠ ، د/(س) < ٠ عندما -٢ < س < ٢ ، د//(س) < ٠ عندما س < ٠ ،
د//(س) > ٠ عندما س >٠

**ارسم الشكل العام لكل من المنحنيات التالية مبينًا عليها القيم القصوى المحلية ونقط الانقلاب إن وجدت:**

**٤١** د(س) = ٤ - س$^{2}$    **٤٢** د(س) = س$^{2}$ - ٤س + ٣

**٤٣** د(س) = س( س + ٣)$^{2}$    **٤٤** د(س) = $\frac{1}{3}$ س$^{3}$ - ٤س + $\frac{1}{3}$

**٤٥** د(س) = ٢ س$^{3}$ - ٩س$^{2}$ + ١٢ س - ٢    **٤٦** د(س) = ٥ + ٣س - س$^{3}$

**٤٧** عين قيم أ ، ب جـ ، ء للمنحنى ص = أ س$^{3}$ + ب س$^{2}$ + جـ س + ء بحيث تكون له قيمة عظمى محلية عند (٠ ، ٦) وقيمة صغرى محلية عند (١ ، ٥) ثم ارسم المنحنى.

**٤٨** سلك طوله ٢٠ مترًا يراد تشكيله على هيئة مستطيل . ما هى أبعاد المستطيل التى تجعل المساحة أكبر مايمكن.

**٤٩** فى الشكل المقابل أ ب جـ ء مستطيل :

أ) أثبت أن الشكل هـ و ز ح متوازى أضلاع مساحته
م = ٢س$^{2}$ - ١٦ س + ٦٠

ب) أوجد أصغر قيمة ممكنة للمساحة م.

أ ، ء ، ح ، س ، ٦ - س ، ز ، جـ ، ١٠ - س ، و ، س ، ب ، ٦ - س ، هـ ، س

**٥٠** قطعة من الورق على شكل قطاع دائرى طول نصف قطر دائرته ١٥سم. طويت لتشكل سطح مخروط دائرى قائم ارتفاعه ع سم.
بين أن حجم المخروط ح سم$^{3}$ يعطى بالعلاقة
ح = $\frac{\pi}{3}$ ع (٢٢٥ - ع$^{2}$) ،
ثم أوجد أكبر حجم ممكن لهذا المخروط.

١٥ سم ، ع

٩٥    كتاب الطالب – الصف الثالث الثانوى

ابعاد المستطيل التى تجعل المساحة اكبر مايمكن هى ٥، ٥

**٥٠** نق$^{2}$ للمخروط = ١٥$^{2}$ - ع$^{2}$

حجم المخروط = $\pi$نق$^{2}$ × ع

ح = $\frac{\pi}{3}$ ع ( ٢٢٥ - ع$^{2}$)

= $\frac{\pi}{3}$( ٢٢٥ ع - ع$^{3}$)

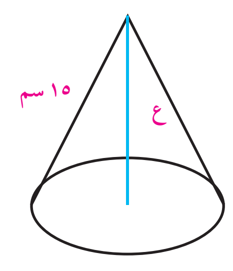
$\frac{ءح}{ءع}$ = $\frac{\pi}{3}$ [ ٢٢٥ - ٣ ع$^{2}$]

عند النقطة الحرجة $\frac{ءح}{ءع}$ = صفر

٣ع$^{2}$ = ٢٢٥    ع$^{2}$ = ٧٥    ع = ٥ $\sqrt{3}$ سم

نق$^{2}$ = ٢٢٥ - ٧٥ = ١٥٠    نق = ٥$\sqrt{6}$

اكبر حجم = $\frac{\pi}{3}$× ٥ $\sqrt{3}$ × ١٥٠ = ٢٥٠$\sqrt{3}$ $\pi$ سم$^{3}$




**٥١** ارتفاع الاسطوانة ١٠ $\sqrt{2}$ لتكوين المساحة الجانبية اكبر ما يمكن.

**٥٣** اكبر مساحة ممكنة عند ب = $\frac{1}{2}$

أ = $\frac{1}{2}$ | ٢ × $\frac{1}{8}$ - $\sqrt{2}$ × $\frac{1}{8}$ |

$= \frac{١}{٢} \left| \frac{١}{٤} - \frac{١}{٢} \right| = \frac{١}{٨}$ وحدة مربعة

**٥٤** قيمة س التى تجعل المساحة أقل من يمكن هى $\frac{٣}{٤}$

**٥٦** $\frac{\triangle ا م ب}{\text{القطاع}} = \frac{\frac{ك^٢}{٣٢} \text{ جا } ٢ ى}{ك^٢} = \frac{١}{٢} \text{ جـ } ٢ ى$

$\simeq ٠,٤٥٤٦ \simeq ٤٥,٥ ٪$

## أختبار تراكمي

**١**

أ $]٢ ، \infty[$     ب ٢

جـ ٥     د $]-\infty ، -١[ \cup ]٥ ، \infty[$

**٢** عند (س) = $\frac{-ب}{ا}$ ( يوجد قيمة عظمى محلية

**٣** عند النقطة الحرجة للدالة:

د/(س) = ٠    ∴ (س) = ٠

أو غير موجودة $س^٢ - ١ = ٠$

س = ± ١

∴ النقط الحرجة هى (-١، ٠)، (٠، ١)، (١، ٠)

**٤** عند النقاط الحرجة للدالة د(س) س = ٢

د(٢) = ٨     (٢، ٨)

**٦**

أ ا = -٣ ∴ ب = ٣

ب د//(س) = $\begin{cases} ٤ & س > ١ \\ \text{غير معرفة} & س = ١ \\ -٢ & س < ١ \end{cases}$

**٨** يكون ح أكبر ما يمكن عند س = ٢

∴ ص = ٣ النقطة (٢، ٣)

**٩** احداثى نقطة ب التي تجعل جـ ى اكبر مايمكن هى :

عند س = ٣ $\frac{١}{٢}$

(٣ $\frac{١}{٢}$ ، ٠)

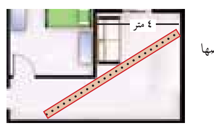
**٥١** أوجد ارتفاع اسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل كره مفرغة طول نصف قطرها من الداخل ١٠سم، عندما تكون المساحة الجانبية للاسطوانة أكبر ما يمكن.

**٥٢** أثبت أنه لجميع قيم س ∈ ح تتحقق المتباينة

$\frac{س}{ا س^٢ + ب} \leqslant \frac{١}{٢\sqrt{ا ب}}$ حيث ا > ٠ ، ب > ٠

**٥٣** لتكن جـ نقطة تقاطع المنحنيين ص٢ = ٤س ، ٤ص = س٢، النقطة ا تقع على المنحنى ص٢ = ٤س وإحداثيها السينى يساوى ٢ ، النقطة ب(س، ص) تقع على المنحنى ٤ص = س٢ بين النقطتين و ، جـ ، أوجد أكبر مساحة ممكنة للمثلث و ا ب

**٥٤** خزان للمياه، مكون من متوازى مستطيلات، قاعدته مربعة الشكل، طول ضلعها ٢س و إرتفاعه س، يعلوه أسطوانة دائرية قائمة طول قطرها ٢س وارتفاعها ص. إذا كان حجم الخزان الكلى ٢٧ مترًا مكعبًا فاحسب قيمة س حتى تجعل مساحة الخزان السطحية أقل ما يمكن.




**٥٥** تفكير إبداعى: ما طول أكبر سلم يمكن نقله أفقيًا عن صالة عرضها ٤ أمتار إلى ممر عمودى عرضه متران.

**٥٦** م ا ب سلك طوله ك سم طوى على شكل قطاع دائرى من دائرة مركزها م طول نصف قطره نق.

أ أوجد قياس زاوية القطاع θ والتى عندها تكون المساحة قيمة قصوى وبين نوعها.

ب أثبت أن مساحة المثلث م ا ب ≃ ٤٥,٥٪ من مساحة القطاع م ا ب عندئذٍ.

٩٦ كتاب الرياضيات البحتة - التفاضل والتكامل

## اختبار تراكمي

**١** يبين الشكل المقابل منحنى د//(س) للدالة د، أكمل:

أ منحنى د محدب لأعلى عندما س ∈ ..........

ب منحنى د له نقطة انقلاب عند س = ..........

جـ إذا كان د/(-١) = د/(٥) = ٠ فإنه يوجد للدالة د قيمة عظمى محلية عند س = ..........

د د متناقصة لكل س ∈ ..........

**٢** إذا كان د/(س) = ا س + ب حيث ا < ٠

أ ابحث وجود قيمة قصوى للداله د مبينًا نوعها إن وجدت.

ب حدد فترات تزايد وتناقص الدالة د عندما ا = -٢ ، ب = ٥

**٣** حدد النقط الحرجة وفترات التزايد والتناقص للدالة د حيث د(س) = $\sqrt[٣]{(س^٢ - ١)^٢}$

**٤** إذا كان د(س) = س٣ - ٦س٢ + ١٢س ، ابحث وجود نقط حرجة للدالة د وحدد فترات التحدب إلى أعلى وفترات التحدب إلى أسفل ونقط الانقلاب إن وجدت، ثم ارسم شكلًا عامًّا لمنحنى د

**٥** ارسم شكلًا عامًّا لمنحنى الدالة د حيث ص = د(س) إذا كان:

د متصلة ومجالها [-١ ، ٥] ، د(١) = د(٣) = ٠ ، د/(٢) غير موجودة،

د/(س) > ٠ عندما س < ٢، د/(س) < ٠ عندما س > ٢ ، د//(س) > ٠ عندما س ≠ ٢

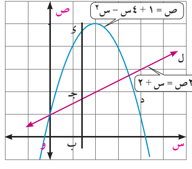
**٦** إذا كانت د دالة قابلة للاشتقاق على ع، د(س) = $\begin{cases} ٢س^٢ + ا س + ب & \text{عندما } س \geqslant ١ \\ ٣س - س^٢ & \text{عندما } س < ١ \end{cases}$

أ أوجد قيم الثابتين ا، ب

ب حدد فترات الندب إلى أعلى والتحدب إلى أسفل ونقط الانقلاب إن وجدت.

**٧** من مجموعة كل الأزواج المرتبة (س، ص) للأعداد الصحيحة غير السالبة والتى مجموع مسقطيها ٥ ، أوجد الزوج المرتب الذى يجعل حاصل ضرب مربع العدد الأول ومكعب العدد الثانى أكبر ما يمكن.

**٨** **يبين الشكل المقابل** منحنى الدالة د، والمستقيم ل إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{ب جـ}$ يوازى محور الصادات ويقطع محور السينات، والمستقيم ل ومنحنى ى فى النقط ب، جـ ، ى على الترتيب فأوجد إحداثي النقطة ب التى تجعل جـ ى أكبر ما يمكن.




٩٧ كتاب الطالب - الصف الثالث الثانوى




# الوحدة الرابعة

## التكامل المحدد وتطبيقاته

## The Definite Integral and its Applications

### مقدمة الوحدة

علمت من دراستك السابقة أن التكامل هى العملية العكسية للتفاضل بالرغم من تعدد التعاريف المستخدمة للتكامل و يعتبر التكامل المحدد لدالة حقيقية دنيا وعليا هى المساحة المحصورة بين المستقيمين س = أ ، س = ب ومحور السينات ومنحنى الدالة و يرمز لهذه العملية بالرمز $\int_{أ}^{ب} د(س)\, ء س$

ومن هذه الوحدة سوف يتعرف الطالب على بعض طرق التكامل مثل التعويض والتجزئ كما سيتعرف على التكامل المحدد وإيجاد مساحات وحجوم بعض المناطق المحصورة بين منحنين وذلك من خلال خمسة دروس على النحو التالي :

- طرق التكامل ( بالتعويض والتجزئ)
- تكامل الدوال المثلثية ( الأساسية ومقلوباتها)
- التكامل المحدد لدالة متصلة وخواصه
- المساحات فى المستوى الإحداثى
- حجوم الأجسام الدورانية .

### مخرجات التعلم:

**فى نهاية الوحدة وتنفيذ الأنشطة فيها من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:**

- يتعرف بعض طرق التكامل مثل: التعويض غير المثلثى، التكامل بالتجزىء $\int س\, هـ^{س}\, ء س$
- يتعرف تكامل الدوال المثلثية وجدول التكاملات الأساسية
- يتعرف التكامل المحدد (النظرية الأساسية فى التفاضل) ويستنتج بعض خواصه.
  - $\int_{ب}^{أ} د(س)\, ء س = -\int_{أ}^{ب} د(س)\, ء س$
  - $\int_{أ}^{أ} د(س) ء س = ٠$
  - $\int_{أ}^{ب} ك\, د(س)\, ء س = ك \int_{أ}^{ب} د(س)\, ء س$
  - $\int_{أ}^{ب} [د(س) \pm ر(س)] ء س$ $= \int_{أ}^{ب} د(س)\, ء س \pm \int_{أ}^{ب} ر(س)\, ء س$
  - $\int_{أ}^{ب} د(س) ء س + \int_{ب}^{جـ} د(س) ء س = \int_{أ}^{جـ} د(س) ء س$
  - $\int_{-أ}^{أ} د(س)\, ء س = ٢ \int_{٠}^{أ} د(س)\, ء س$ حيث د دالة زوجية
  - $\int_{-أ}^{أ} د(س)\, ء س = ٠$ حيث د دالة فردية
- يتعرف العلاقة بين التفاضل والتكامل
  - $\frac{ء}{ء س} \int_{أ}^{س} د(ن)\, ء ن = د(س)$
  - $\int_{أ}^{س} د/(ن)\, ء ن = د(س) - د(أ)$
- يستخدم التكامل المحدد فى حل مشكلات تتضمن إيجاد مساحة.
- يوجد مساحة المنطقة المستوية تحت المنحنى، فوق محور السينات حيث د (س) غير سالبة لجميع قيم س فى المجال باستخدام التكامل المحدد.
- يوجد مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين منحنيين.
- يستخدم التكامل المحدد فى حل مشكلات تتضمن إيجاد حجم سطح دورانى حول أحد محاور الاحداثيات

## زمن تدريس الوحدة :

(١٣ حصة)

## مهارات التفكير التى تنميها الوحدة:

التفكير الناقد - التفكير الابداعى - التفكير التحليلى - حل المشكلات.

## الوسائل التعليمية المستخدمة:

السبورة التعليمية - سبورة مربعات - طباشير ملون - آلة حاسبة علمية - آلة حاسبة بيانية - حاسب آلي مزود ببرامج رسومية

## طرق التدريس المقترحة:

العرض المباشر - المناقشة - الطريقة الاستنباطية - حل المشكلات..

## طرق التقييم المقترحة

يتمثل فى الأسئلة الشفهية والتحريرية الفردية والجماعية أثناء الدرس وبعد الدرس ، والأنشطة المقترحة وسلم النشاط الخاص بكل منها والتكاليف الجماعية والفردية وتدريبات عامة علي الوحدة والأختبار التراكمى فى نهاية الوحدة.

## المخطط التنظيمى للوحدة

**يتناول الأتى :**

**التكامل وينقسم إلى :**

**التكامل غير المحدد وتعيين ثابت التكامل**

**التكامل المحدد : خواصه - النظرية العامة للتكامل تطبيقاته ( هندسية ، اقتصادية - المساحات - الحجوم )**

**صيغ التكامل : وتشمل طرق التكامل ( التعويض ، التجزئ) لدوال جبرية - أسية - لوغاريتمية - مثلثية .**



# ٤ - ١
# طرق التكامل
## Methods of Inegration

### خلفية:

سبق وأن درس الطالب التكامل غير المحدد فى فترة متصلة وهو يشمل مجموعة المنحنيات ص = د(س) + ث حيث أن ميل المماس لها متساو لكنها تختلف فى الثابت ث كما درس بعض العمليات البسيطة عليها وفى هذا الدرس سوف يتعرف الطالب على مفهوم التفاضلى مع إجراء بعض التكاملات الأساسية للدوال الجبرية والمثلثية واللوغاريتمية، كما سيتعرف على التكامل بالتعويض وأخيرًا التكامل بالتجزئ.

### مخرجات الدرس:

**فى نهاية هذا الدرس وتنفيذ الأنشطة فيه من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:**

- يوجد دالة مشتقة عكسية معطاه باستخدام التكامل
- يتعرف على مفهوم التفاضلى ويستخدمه فى إيجاد عملية التكامل.
- يحسب التكامل باستخدام طريقة التعويض
- يحسب التكامل باستخدام طريقة التجزئ

### مفردات أساسية

- مشتقة عكسية – تكامل غير محدد – تفاضلى – تكامل بالتعويض – تكامل بالتجزئ .

### المواد التعليمية المستخدمة:

السبورة التعليمية - طباشير ملون - آلة حاسبة علمية - برامج رسومية للحاسوب.

### طرق التدريس المقترحة:

العرض المباشر - المناقشة - العصف الذهنى - حل المشكلات.

### مكان التدريس:

الفصل الدراسى

### مصادر التعليم:

كتاب الطالب من ص (١٠٢) إلى ص (١١٢)



٤ - ١

طرق التكامل

Methods of Inegration

**سوف تتعلم**

- إيجاد الدالة الأصلية لدالة معطاة.
- إيجاد تفاضلى دالة.
- حساب التكامل بالتعويض.
- حساب التكامل بالتجزئ.

**المصطلحات الأساسية**

- المشتقة العكسة Antiderivative
- التكامل غير المحدد Indefinite Integral
- تفاضلى Differential

**الأدوات المستخدمة**

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسب.

**مقدمة**

سبق وتعرفت على المشتقة العكسية أو التكامل غير المحدد، وهو عملية عكسية لعملية الاشتقاق، فيقال للدالة ت أنها مشتقة عكسية للدالة د فى فترة ف إذا كان: $\frac{ء}{ءس}$ ت (س) = د (س) لكل س∈ ف

عند إضافة أى ثابت للمشتقة العكسية ت، (**يعرف بالثابت الاختيارى**) تُمثَل المشتقة العكسية عندئذ بمجموعة المنحنيات ص = د(س) + ث التى تختلف عن بعضها فى الثابت ث وميل المماس لأى منها متساوى لذلك فهى منحنيات متوازية كما فى الشكل المقابل، وقد اصطلح على تسمية مجموعة المشتقات العكسية هذه بالتكامل غير المحدد ويرمز به بالرمز: $\int$ د (س) ءس ويكون:

$$\int د(س)\, ءس = ت(س) + ث$$



**للتكامل غير المحدد الخواص التالية:**

إذا كانت د ، ر دالتين لهما مشتقتان عكسيتان فى الفترة ف فإن:

**١-** $\int [د(س) \pm ر(س)]\, ءس = \int د(س)\, ءس \pm \int ر(س)\, ءس$

**٢-** $\int ك\, د(س)\, ءس = ك \int د(س)\, ءس$ حيث ك عدد حقيقى ثابت

**لاحظ أن:**

$\int س^{ن}\, ءس = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + ث$ حيث ن ≠ -١ ، ث ثابت اختيارى

**وعلى ذلك**

$\int (٣س^{٢} + ٤س + ٥)\, ءس = س^{٣} + ٢س^{٢} + ٥س + ث$

- عملية إيجاد المشتقات العكسية يتطلب معرفة صور التكاملات القياسية لبعض الدوال، إلا أن التكاملات المطلوب إيجادها قد تظهر بعيدة عن التكاملات القياسية وهو أمر يتطلب التعرف على طرق أخرى للتكامل منها التكامل بالتعويض والتكامل بالتجزىء اعتمادًا على تفاضلى الدالة.

١٠٠ كتاب الرياضيات البحتة - التفاضل والتكامل

### تهيئة:

- ذكر الطلاب بأن المشتقة العكسية للدالة هى عملية عكسية للأشتقاق كما فى المخطط التالي:
- الدالة د(س) $\underset{تكامل}{\overset{تفاضل}{\rightleftarrows}}$ مشتقة الدالة د(س) وتعطى بعض الأمثلة العددية لتثبيت هذا المفهوم.
- وسوف يتم دراسة التكامل بالتعويض والتكامل بالتجزئ تفصيلاً اعتماداً على مفهوم التفاضلى.

## إجراءات الدرس:

في بند التفاضلات ص (١٠٣)

### التفاضل: توسعة للمعلم:

نفرض أن الدالة ص = د(س) قابلة للاشتقاق عند النقطة س ونفرض أن النقطة س + ∆س تنتمي لمجال هذه الدالة. تغير س إلى س + ∆س يؤدي إلى تغير ص إلى ص + ∆ص،

حيث ∆ص = د(س + ∆س) - د(س)

من تعريف المشتقة لدينا أن: نهـا$_{\text{∆س}\to 0}$ $\frac{\text{∆ص}}{\text{∆س}}$ = د'(س)

وهذا يكافئ أن: نهـا$_{\text{∆س}\to 0}$ ($\frac{\text{∆ص}}{\text{∆س}}$ - د'(س)) = صفرًا   ١

إذا وضعنا $\frac{\text{∆ص}}{\text{∆س}}$ - د'(س) = و

نجد أن: ∆ص = د'(س) ∆س + و ∆س   ٢

حيث نرى من (١) أن و ⟵ ٠ عندما ∆س ⟵ ٠ وبالتالي عندما تكون ∆س صغيرة بما فيه الكفاية فإن∆ص تكون عبارة عن مجموع حدين. ثانيهما صغير جدًا بالنسبة إلى أولهما.

يسمى الحد الأول في الطرف الأيسر للمعادلة (٢) وهو د'(س) ∆س بالجزء الرئيسي لتغير الدالة ص ونرمز له بالرمز ء ص

أي أن: ء ص = د'(س) س   ٣

كما تسمى ء ص أيضًا بتفاضلي الدالة ص = د(س). وعلى ذلك فإن ء ص تعطي تقريبا جيدا لتغير الدالة ∆ص إذا كانت ∆س صغيرة بما فيه الكفاية، كما أن مقدار الخطأ عند ذلك يصغر مع صغر ∆س.

كحالة خاصة من (٣) عندما ص = س نجد أن:

ء ص = (١) ∆س = ∆س ⟵ ء س = ∆ س

أي أن تفاضلي المتغير المستقل ∆س هو نفسه التغير س الحادث في س. وعلى ذلك فمن الأفضل إعادة كتابة (٣) على الصورة

ء ص = د'(س) ء س



**التفاضلات** Differentials

إذا كانت د دالة قابلة للاشتقاق، حيث ص = د(س)

من تعريف المشتقة:

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = د'(س) = نهـا$_{\text{∆س}\to 0}$ $\frac{\text{∆ص}}{\text{∆س}}$ = نهـا$_{\text{∆س}\to 0}$ $\frac{\text{د(س+∆س) - د(س)}}{\text{∆س}}$

∴ عندما ∆س ⟵ ٠ فإن: $\frac{\text{∆ص}}{\text{∆س}}$ ⟵ د'(س)

أي أن: $\frac{\text{∆ص}}{\text{∆س}}$ ≃ د'(س) عندما ∆س ⟵ ٠، ∆س ≠ ٠

∴ ∆ص ≃ د'(س)∆س (بالضرب × ∆س)

**تعريف:** لتكن د دالة قابلة للاشتقاق على فترة مفتوحة تحوى س، ∆س يرمز للتغير في س حيث ∆س ≠ ٠ فإن

١- تفاضلي ص (ويرمز له بالرمز ء ص) = د'(س) ∆س

٢- تفاضلي س (ويرمز بالرمز ء س) = ∆س

على ذلك فإن:

ء ص = د'(س) ء س وهو دالة في متغيرين س، ء س

إذا كانت ص = $\text{س}^3$ فإن: ء ص = $\text{٣س}^2$ ء س

**مثال** تفاضل الدالة

١ أوجد تفاضلي كل مما يأتي:

أ ص = $\frac{\text{س}}{\text{س - ١}}$   ب ع = $\frac{4}{3}\pi$ $\text{نق}^3$

ج ص = ع . ل   حيث كل من ع، ل دالة في س

**الحل**

أ ∵ ء ص = ص' ء س، ص = $\frac{\text{س}}{\text{س - ١}}$ = ١ + $\frac{1}{\text{س - ١}}$ = ١ + $(\text{س - ١})^{-1}$

∴ ء ص = $\frac{-1}{(\text{س - ١})^2}$ ء س

ب ∵ ء ع = ع' ء نق   ∴ ء ع = $\frac{4}{3}\pi$ × $\text{٣نق}^2$ ء نق = $\text{٤}\pi\text{نق}^2$ ء نق

ج ∵ ء ص = (ع . ل)' ء س

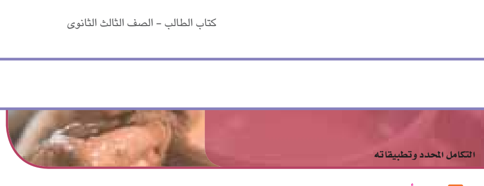
= (ع . ل' + ل . ع') ء س

= ع . ل' ء س + ل . ع' ء س

ء ص = ع ء ل + ل ء ع

لاحظ أن: ء ل = ل' ء س، ء ع = ع' ء س







**حاول أن تحل**

١ أوجد تفاضلي كل من:

أ ص = $(\text{٢س}^3 + ٥)^4$   ب ص = $\text{هـ}^{-\text{س}^2 - ٣}$

ج ص = $\frac{\text{ع}}{\text{ل}}$ حيث ع، ل دوال في المتغير س

تفكير ناقد: إذا كان $\text{س}^2 + \text{ص}^2$ = ٢٥ أوجد: ء ص بدلالة س، ص، ء س

**التكاملات الأساسية (القياسية)**

لا توجد طريقة عامة لإيجاد تكامل الدوال المختلفة تماثل طرق إيجاد مشتقات هذه الدوال، إذ ينحصر إيجاد تكامل أي دالة د في البحث عن دالة تكون مشتقاتها هي الدالة د وهذا يتوقف على مدى استيعابك لمشتقات الدوال الأساسية السابق دراستها، والتي نلخصها في الجدول التالي:

جدول مشتقات الدوال الأساسية و التكاملات القياسية المناظرة

| المشتقة | الشرط | التكامل | الشرط |
|---|---|---|---|
| $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ ($\text{س}^{\text{ن}}$) = ن $\text{س}^{\text{ن}-1}$ | ن ∈ ع | ∫$\text{س}^{\text{ن}}$ ء س = $\frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1}$ + ث | ن ∈ ع - {-١} |
| $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (جا س) = جتا س | | ∫جتا س ء س = جا س + ث | |
| $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (جتا س) = - جا س | | ∫جا س ء س = - جتا س + ث | |
| $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (ظا س) = $\text{قا}^2$ س، س ≠ $\frac{\text{٢ن+١}}{2}\pi$، ن ∈ ص | | ∫$\text{قا}^2$ س ء س = ظا س + ث، س ≠ $\frac{\text{٢ن+١}}{2}\pi$، ن ∈ ص | |
| $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ ($\text{هـ}^{\text{س}}$) = $\text{هـ}^{\text{س}}$ | | ∫$\text{هـ}^{\text{س}}$ ء س = $\text{هـ}^{\text{س}}$ + ث | |
| $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ ($\text{أ}^{\text{س}}$) = $\text{أ}^{\text{س}}$ $\text{لو}_{\text{هـ}}$ أ | أ > ٠، أ ≠ ١ | ∫$\text{أ}^{\text{س}}$ ء س = $\frac{\text{أ}^{\text{س}}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ}}$ + ث | أ > ٠، أ ≠ ١ |
| $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ ($\text{لو}_{\text{هـ}}$ س) = $\frac{1}{\text{س}}$ | س > ٠ | ∫$\frac{1}{\text{س}}$ ء س = $\text{لو}_{\text{هـ}}$\|س\| + ث | س ≠ ٠ |

**التكامل بالتعويض** Integration by Substitntion

من أهم طرق التكامل لإيجاد تكامل حاصل ضرب دالتين على الصورة: ∫د(ر(س)) ر'(س) ء س

فإذا كانت ع = ر(س) دالة قابلة للاشتقاق

فإن ء ع = ر'(س) ء س ويكون:

∫د(ر(س)) ر'(س) ء س = ∫د(ع) ء ع

لإجراء عملية التكامل بالتعويض نتبع المخطط المقابل:

اختيار التعويض ع
حساب ء ع
التعويض والتبسيط
هل يمكن تكامل الدالة
لا
اختيار تعويض آخر
حساب التكامل
كتابة الناتج بدلالة المتغير الأصلي

## التقييم المستمر (المناقشة والحوار):

⌑ ناقش مع طلابك ما ورد فى بند حاول أن تحل وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة :

### إجابات حاول ان تحل ص ١٠٢

أ $\text{ى ص} = ٨\,(٢\text{س} + ٥)^{٣}\ \text{ى س}$

ب $\text{ى ص} = ٢\ \text{هـ}^{٢\text{س}-٣}\ \text{ى س}$

جـ $\text{ى}\left(\frac{\text{ع}}{\text{ل}}\right) = \frac{\text{ل ى ع} - \text{ع ى ل}}{\text{ل}^{٢}}$

### فى بند تفكير ناقد ص (١٠٢)

⌑ يهدف إلى استخدام مفهوم التفاضلى مع الأشتقاق الضمنى.

$\text{ى ص} = -\frac{\text{س ى س}}{\text{ص}}$

٢ أ $\frac{٣}{١٠}\,(\text{س}^{٢} + ٣)^{٥} + \text{ث}$

ب $\frac{-١}{١٢(\text{س}^{٣} - ٤)^{٤}} + \text{ث}$

٣ $\frac{١}{١٢٠}\,(٢\text{س} - ٣)^{٥}\,[\,١٠\text{س} - ١٥) + ١٨] + \text{ث}$

$= \frac{١}{١٢٠}\,(١٠\text{س} + ٣)\,(٢\text{س} - ٣)^{٥} + \text{ث}$

### ارشادات للدراسة:

عند إيجاد $\int (\text{س}^{٢}+٣)\,\sqrt{\text{س} - ١}\ \text{ى س}$ من المهم التعويض عن قيمة ع بقيمة مناسبة للمتغير س ومن الأنسب فى هذا المثال وضع : $\text{ع}^{٢} = \text{س} - ١$ حتى يمكن التخلص من الجذر التربيعي لذلك $\text{ى س} = ٢\ \text{ع ى ع}$

بالتعويض تصبح المسألة $٢\int (\text{ع}^{٦} + ٢\text{ع}^{٤} + ٤\,\text{ع}^{٢})\ \text{ى ع}$ ويكمل الحل

### كذلك فى حاول أن تحل ٣ ب

نضع: $\text{ع}^{٣} = ٣\text{س} + ١$

$\therefore \text{س} = \frac{\text{ع}^{٣} - ١}{٣}$

$\therefore \text{ى س} = \text{ع}^{٢}\ \text{ى ع}$ بالتعويض

$\int \text{ع} \times \frac{\text{ع}^{٦} - ٢\text{ع}^{٣} + ١}{٩} \times \text{ع}^{٢}\ \text{ى ع}$

$= \frac{١}{٩}\int (\text{ع}^{٩} - ٢\,\text{ع}^{٦} + \text{ع}^{٣})\ \text{ى ع}$

$= \frac{١}{٩}\left[\frac{١}{١٠}\,\text{ع}^{١٠} - \frac{٢}{٧}\text{ع}^{٧} + \frac{١}{٤}\text{ع}^{٤}\right] + \text{ث}$

$= \frac{١}{٩} \times \frac{١}{١٤٠}\text{ع}^{٤}\,(\,١٤\,\text{ع}^{٦} - ٤\,\text{ع}^{٣} + ٣٥\,) + \text{ث}$

ويكمل الحل بالتعويض عن قيمة ع



طرق التكامل ٤ - ١

**مثال** التكامل بالتعويض

٢ أوجد

أ $\int \text{س}^{٣}\,(٢\,\text{س}^{٤} - ٧)^{٥}\ \text{ى س}$ ب $\int \frac{\text{س} + ٤}{(\text{س}^{٢} + ٨\text{س})^{٣}}\ \text{ى س}$

**الحل**

أ بوضع $\text{ع} = ٢\text{س}^{٤} - ٧$ $\therefore \text{ى ع} = ٨\text{س}^{٣}\ \text{ى س}$

$\int \text{س}^{٣}\,(٢\text{س}^{٤} - ٧)^{٥}\ \text{ى س} = \frac{١}{٨}\int (٢\text{س}^{٤} - ٧)^{٥}\,(٨\text{س}^{٣}\ \text{ى س})$

$= \frac{١}{٨}\int \text{ع}^{٥}\ \text{ى ع} = \frac{١}{٨ \times ٦}\,\text{ع}^{٦} + \text{ث}$

$= \frac{١}{٤٨}\,(٢\,\text{س}^{٤} - ٧)^{٦} + \text{ث}$

ب بوضع $\text{ع} = \text{س}^{٢} + ٨\text{س}$ $\therefore \text{ى ع} = (٢\text{س} + ٨)\ \text{ى س} = ٢\,(\text{س} + ٤)\ \text{ى س}$

$\int \frac{\text{س} + ٤}{(\text{س}^{٢} + ٨\text{س})^{٣}}\ \text{ى س} = \frac{١}{٢}\int \frac{٢(\text{س}+٤)\ \text{ى س}}{(\text{س}^{٢} + ٨\text{س})^{٣}} = \frac{١}{٢}\int \frac{١}{\text{ع}^{٣}}\ \text{ى ع}$

$= \frac{١}{٢}\int \text{ع}^{-٣}\ \text{ى ع} = \frac{١}{٢ \times -٢}\,\text{ع}^{-٢} + \text{ث}$

$= \frac{-١}{٤(\text{س}^{٢} + ٨\text{س})^{٢}} + \text{ث}$

**حاول أن تحل**

٢ أوجد :

أ $\int ٣\text{س}\,(\text{س}^{٢} + ٣)^{٤}\ \text{ى س}$ ب $\int \frac{\text{س}^{٢}}{(\text{س}^{٣} - ٤)^{٥}}\ \text{ى س}$

**مثال** التكامل بالتعويض

٣ أوجد

أ $\int \text{س}\,(\text{س} + ٤)^{٧}\ \text{ى س}$ ب $\int (\text{س}^{٢} + ٥)\,\sqrt{\text{س} - ١}\ \text{ى س}$

**الحل**

أ بوضع $\text{ع} = \text{س} + ٤$ $\therefore \text{س} = \text{ع} - ٤ ،\ \text{ى س} = \text{ى ع}$

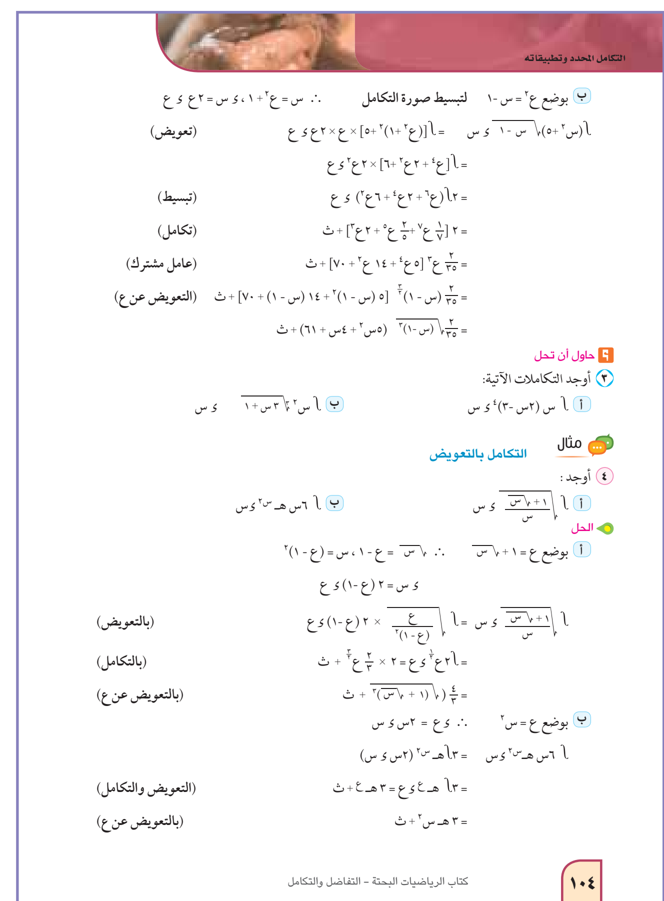
$\int \text{س}\,(\text{س} + ٤)^{٧}\ \text{ى س} = \int \text{ع}^{٧}\,(\text{ع} - ٤)\ \text{ى ع} = \int (\text{ع}^{٨} - ٤\,\text{ع}^{٧})\ \text{ى ع}$ (تعويض)

$= \frac{١}{٩}\text{ع}^{٩} - \frac{١}{٢}\text{ع}^{٨} + \text{ث}$ (تكامل)

$= \frac{١}{١٨}\,\text{ع}^{٨}\,(٢\,\text{ع} - ٩) + \text{ث}$ (تبسيط)

$= \frac{١}{١٨}\,(\text{س} + ٤)^{٨}\,(٢\text{س} - ١)$ (تعويض عن ع)

كتاب الطالب - الصف الثالث الثانوى ١٠٣



التكامل المحدد وتطبيقاته

ب بوضع $\text{ع}^{٢} = \text{س} - ١$ **لتبسيط صورة التكامل** $\therefore \text{س} = \text{ع}^{٢} + ١ ،\ \text{ى س} = ٢\text{ع ى ع}$

$\int (\text{س}^{٢}+٥)\sqrt{\text{س} - ١}\ \text{ى س} = \int [(\text{ع}^{٢}+١)^{٢}+٥] \times \text{ع} \times ٢\text{ع ى ع}$ (تعويض)

$= \int [\text{ع}^{٤} + ٢\text{ع}^{٢} + ٦] \times ٢\text{ع}^{٢}\ \text{ى ع}$

$= ٢\int (\text{ع}^{٦} + ٢\text{ع}^{٤} + ٦\text{ع}^{٢})\ \text{ى ع}$ (تبسيط)

$= ٢\left[\frac{١}{٧}\text{ع}^{٧} + \frac{٢}{٥}\text{ع}^{٥} + ٢\text{ع}^{٣}\right] + \text{ث}$ (تكامل)

$= \frac{٢}{٣٥}\,\text{ع}^{٣}\,[٥\text{ع}^{٤} + ١٤\,\text{ع}^{٢} + ٧٠] + \text{ث}$ (عامل مشترك)

$= \frac{٢}{٣٥}\,(\text{س} - ١)^{\frac{٣}{٢}}\,[٥\,(\text{س} - ١)^{٢} + ١٤\,(\text{س} - ١) + ٧٠] + \text{ث}$ (التعويض عن ع)

$= \frac{٢}{٣٥}\sqrt{(\text{س} - ١)^{٣}}\ (٥\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٦١) + \text{ث}$

**حاول أن تحل**

٣ أوجد التكاملات الآتية:

أ $\int \text{س}\,(٢\text{س} - ٣)^{٤}\ \text{ى س}$ ب $\int \text{س}^{٢}\sqrt[٣]{٣\text{س} + ١}\ \text{ى س}$

**مثال** التكامل بالتعويض

٤ أوجد :

أ $\int \sqrt{\frac{١ + \sqrt{\text{س}}}{\text{س}}}\ \text{ى س}$ ب $\int ٦\text{س}\ \text{هـ}^{\text{س}^{٢}}\ \text{ى س}$

**الحل**

أ بوضع $\text{ع} = ١ + \sqrt{\text{س}}$ $\therefore \sqrt{\text{س}} = \text{ع} - ١ ،\ \text{س} = (\text{ع} - ١)^{٢}$

$\text{ى س} = ٢\,(\text{ع} - ١)\ \text{ى ع}$

$\int \sqrt{\frac{١ + \sqrt{\text{س}}}{\text{س}}}\ \text{ى س} = \int \sqrt{\frac{\text{ع}}{(\text{ع} - ١)^{٢}}} \times ٢\,(\text{ع} - ١)\ \text{ى ع}$ (بالتعويض)

$= \int ٢\text{ع}^{\frac{١}{٢}}\ \text{ى ع} = ٢ \times \frac{٢}{٣}\,\text{ع}^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$ (بالتكامل)

$= \frac{٤}{٣}\left(\sqrt{(١ + \sqrt{\text{س}})^{٣}}\right) + \text{ث}$ (بالتعويض عن ع)

ب بوضع $\text{ع} = \text{س}^{٢}$ $\therefore \text{ى ع} = ٢\text{س ى س}$

$\int ٦\text{س}\ \text{هـ}^{\text{س}^{٢}}\ \text{ى س} = ٣\int \text{هـ}^{\text{س}^{٢}}\,(٢\text{س ى س})$

$= ٣\int \text{هـ}^{\text{ع}}\ \text{ى ع} = ٣\ \text{هـ}^{\text{ع}} + \text{ث}$ (التعويض والتكامل)

$= ٣\ \text{هـ}^{\text{س}^{٢}} + \text{ث}$ (بالتعويض عن ع)

كتاب الرياضيات البحتة - التفاضل والتكامل ١٠٤

## التقييم المستمر (المناقشة والحوار):

**٤** أ $\text{ع} = ١ - ٣\text{س}^٢ \qquad \therefore \text{ءس} = -\frac{\text{ءع}}{٦\text{س}}$

$\int \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{ع}}} \times -\frac{\text{ءع}}{٦\text{س}} = -\frac{١}{٦}\int \text{ع}^{-\frac{١}{٢}}\,\text{ءع}$

$= -\frac{١}{٦} \times ٢ \times \text{ع}^{\frac{١}{٢}} + \text{ث}$

$= -\frac{١}{٣}\sqrt{١ - ٣\text{س}^٢} + \text{ث}$

ب بوضع: $\text{ع} = ٦\text{س} - \text{س}^٢$

$\therefore \text{ءع} = (٦ - ٢\text{س})\,\text{ءس}$

$\int \frac{١}{٢}\text{هـ}^{\text{ع}}\,\text{ءع} = \frac{١}{٢}\text{هـ}^{\text{ع}} + \text{ث}$

$= \frac{١}{٢}\text{هـ}^{٦\text{س} - \text{س}^٢} + \text{ث}$

**٥** أ $\frac{١}{٢\text{هـ}^٣}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{هـ}^{٢\text{س}+٣}| + \text{ث}$

ب $\frac{١}{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}} + \text{ث}$

### فى بند تفكير ناقد ص (١٠٦)

**١** $\int [\text{د}(\text{س})]^{\text{ن}}\,\text{د}'(\text{س})\,\text{ءس}$

بوضع: $\text{د}(\text{س}) = \text{ع} \qquad \therefore \text{د}'(\text{س})\,\text{ءس} = \text{ءع}$

$\int \text{ع}^{\text{ن}}\,.\,\text{ءع} = \text{ع}^{\text{ن}+١} + \text{ث} = \frac{١}{\text{ن}+١}\left(\text{د}(\text{س})\right)^{\text{ن}+١} + \text{ث}$

**٢** $\int \frac{\text{د}'(\text{س})}{\text{د}(\text{س})}\,\text{ء}(\text{س})$ بوضع $\text{د}(\text{س}) = \text{ع} \quad \therefore \text{د}'(\text{س})\,\text{ءس} = \text{ءع}$

$\int \frac{\text{ءع}}{\text{ع}} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ع}| + \text{ث} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{د}(\text{س})| + \text{ث}$

## التكامل بالتجزئ:

بين إلى الطلاب أنه من العلاقة: $\int \text{ص}\,\text{ءع} + \int \text{ع}\,\text{ءص}$

تكون: $\int \text{ص}\,\text{ءع} = \text{ص}\,\text{ع} - \int \text{ع}\,\text{ءص}$

- ناقش مع الطلاب ما ورد فى مثال (٧) ص (١٠٦) ومدى ارتباط الفقرة (ب) بالفقرة (أ)

## التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

- ناقش مع طلابك ما ورد فى بند حاول أن تحل :

### إجابات حاول ان تحل ٦

أ $\text{ص} = \text{س} \qquad \text{ءع} = \text{هـ}^{-٢\text{س}}\,\text{ءس}$

$\text{ءص} = \text{ءس} \qquad \text{ع} = \int \text{هـ}^{-٢\text{س}}\,\text{ءس} = -\frac{\text{هـ}^{-٢\text{س}}}{٢}$

$\int \text{ص}\,\text{ءع} = \text{ص}\,\text{ع} - \int \text{ع}\,\text{ءص}$

$= -\frac{\text{س}\,\text{هـ}^{-٢\text{س}}}{٢} - \int -\frac{١}{٢}\text{هـ}^{-٢\text{س}}\,\text{ءس}$

$= -\frac{١}{٢}\text{هـ}^{-٢\text{س}}\left(\text{س} + \frac{١}{٢}\right) + \text{ث}$

---



**حاول أن تحل**

**٤** أوجد :

أ $\int \frac{\text{س}}{\sqrt{١ - ٣\text{س}^٢}}\,\text{ءس}$ ب $\int (٣ - \text{س})\,\text{هـ}^{٦\text{س} - \text{س}^٢}\,\text{ءس}$

**مثال** التكامل بالتعويض

**٥** أوجد

أ $\int \frac{٥\text{س}}{٣\text{س}^٢ - ١}\,\text{ءس}$ ب $\int \frac{\sqrt{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}}{\text{س}}\,\text{ءس}$

**الحل**

أ بوضع $\text{ع} = ٣\text{س}^٢ - ١ \qquad \text{ءع} = ٦\text{س}\,\text{ءس}$

$\int \frac{٥\text{س}}{٣\text{س}^٢ - ١}\,\text{ءس} = \frac{٥}{٦}\int \frac{٦\text{س}\,\text{ءس}}{٣\text{س}^٢ - ١} = \frac{٥}{٦}\int \frac{١}{\text{ع}}\,\text{ءع}$ (التعويض)

$= \frac{٥}{٦}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ع}| + \text{ث} = \frac{٥}{٦}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|٣\text{س}^٢ - ١| + \text{ث}$ (التكامل والتعويض)

ب بوضع $\text{ع} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \qquad \therefore \text{ءع} = \frac{١}{\text{س}}\,\text{ءس}$

$\int \frac{\sqrt{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}}{\text{س}}\,\text{ءس} = \int \sqrt{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}\left(\frac{١}{\text{س}}\,\text{ءس}\right) = \int \text{ع}^{\frac{١}{٢}}\,\text{ءع}$ (بالتعويض)

$= \frac{٢}{٣}\text{ع}^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$

$= \frac{٢}{٣}[\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س})]^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$ (بالتكامل والتعويض)

**حاول أن تحل**

**٥** أوجد :

أ $\int \frac{\text{هـ}^{٢\text{س}}}{\text{هـ}^{٢\text{س}} + ٣}\,\text{ءس}$ ب $\int \frac{١}{\text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^٢}\,\text{ءس}$

**تفكير ناقد:** باستخدام التكامل بالتعويض أثبت صحة قواعد التكامل التالية:

١- $\int [\text{د}(\text{س})]^{\text{ن}}\,\text{د}'(\text{س})\,\text{ءس} = \frac{[\text{د}(\text{س})]^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١} + \text{ث}$ حيث $\text{ن} \neq -١$

٢- $\int \frac{\text{د}'(\text{س})}{\text{د}(\text{س})}\,\text{ء}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{د}(\text{س})| + \text{ث}$ حيث $\text{د}(\text{س}) \neq ٠$

### التكامل بالتجزئ Integration by Parts

إذا كانت ص ، ع دالتين فى المتغير س وقابلتين للإشتقاق، فإن:

$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{ص}\,\text{ع}) = \text{ص}\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} + \text{ع}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

بتكامل الطرفين بالنسبة إلى س

$\int \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{ص}\,\text{ع})\,\text{ءس} = \int \text{ص}\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}\,\text{ءس} + \int \text{ع}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\,\text{ءس}$

**تذكر أن**

$\text{ءع} = \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}\,\text{ءس}$

$\text{ءص} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\,\text{ءس}$





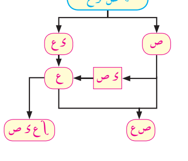
---



$\text{ص}\,\text{ع} = \int \text{ص}\,\text{ءع} + \int \text{ع}\,\text{ءص}$

**أى أن:** $\int \text{ص}\,\text{ءع} = \text{ص}\,\text{ع} - \int \text{ع}\,\text{ءص}$

تسمى المعادلة السابقة بقاعدة التكامل بالتجزىء ، وتستخدم لإيجاد تكامل حاصل ضرب دالتين ليست أحدهما مشتقة للأخرى، ذلك باختيار مناسب لكل من ص ، ع بحيث يمكن حساب التكامل بالطرف الأيسر بطريقة أسهل من حساب التكامل بالطرف الأيمن، وتتبع المخطط المقابل كما يتضح من الأمثلة التالية:




**مثال** التكامل بالتجزئ

**٦** أوجد:

أ $\int \text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس}$ ب $\int \text{س}^٢\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس}$

**الحل**

أ لايجاد $\int \text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس}$:

نفرض أن: $\text{ص} = \text{س}$ ، $\text{ءع} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس}$

$\therefore \text{ءص} = \text{ءس} \qquad \text{ع} = \int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$\because \int \text{ص}\,\text{ءع} = \text{ص}\,\text{ع} - \int \text{ع}\,\text{ءص}$

$\therefore \int \text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس} = \text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}} - \int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس} = \text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}^{\text{س}} + \text{ث} = \text{هـ}^{\text{س}}(\text{س} - ١) + \text{ث}$

**ملاحظة هامة:** إضافة ثابت إلى الدالة ع لا يغير من النتيجة (أثبت ذلك)

ب لإيجاد $\int \text{س}^٢\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس}$:

نفرض أن: $\text{ص} = \text{س}^٢$ ، $\text{ءع} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس}$

$\text{ءص} = ٢\text{س}\,\text{ءص} \qquad \text{ع} = \int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$\int \text{س}^٢\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس} = \text{س}^٢\,\text{هـ}^{\text{س}} - \int ٢\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس}$

$= \text{س}^٢\,\text{هـ}^{\text{س}} - ٢\int \text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس}$

$\int \text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس} = \text{هـ}^{\text{س}}(\text{س} - ١) + \text{ث}$ من أ

$= \text{س}^٢\,\text{هـ}^{\text{س}} - ٢\,\text{هـ}^{\text{س}}(\text{س} - ١) + \text{ث}$

$= \text{هـ}^{\text{س}}[\text{س}^٢ - ٢\text{س} + ٢] + \text{ث}$

**حاول أن تحل**

**٦** أوجد :

أ $\int \text{س}\,\text{هـ}^{-٢\text{س}}\,\text{ءس}$ ب $\int \text{س}^٢\,\text{هـ}^{\text{س}+٣}\,\text{ءس}$

**ب** بوضع $\text{ص} = \text{س}^{٢}$ ، $\text{ءع} = \text{هـ}^{\text{س}+٣}\,\text{ءس}$

$\text{ءص} = ٢\text{س}\,\text{ءس}$ ، $\text{ع} = \text{هـ}^{\text{س}+٣}$

$$\int \text{ص ءع} = \text{ص ع} - \int \text{ع ءص}$$

$$\int \text{س}^{٢}\text{هـ}^{\text{س}+٣}\,\text{ءس} = \text{س}^{٢}\text{هـ}^{\text{س}+٣} - \int \text{هـ}^{\text{س}+٣} \times ٢\,\text{س}\,\text{ءس}$$

$$= \text{س}^{٢}\text{هـ}^{\text{س}+٣} - ٢\int \text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}+٣}\,\text{ءس}$$

نكرر نفس العمل مع $\int \text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}+٣}\,\text{ءس}$

$$\therefore \int \text{س}^{٢}\text{هـ}^{\text{س}+٣}\,\text{ءس}$$

$$= \text{س}^{٢}\text{هـ}^{\text{س}+٣} - ٢\,\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}+٣} + ٢\,\text{هـ}^{\text{س}+٣} + \text{ث}$$

## إجابات حاول ان تحل ٧

**أ** بوضع $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+١)$ ، $\text{ءع} = \text{ءس}$

$\text{ءص} = \frac{١}{\text{س}+١}\,\text{ءس}$ ، $\text{ع} = \text{س}$

$$\int \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+١)\,\text{ءس} = \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+١) - \int \frac{\text{س}}{\text{س}+١}\,\text{ءس}$$

$$= \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+١) - \int \left(١ - \frac{١}{\text{س}+١}\right)\text{ءس}$$

$$= \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+١) - \text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+١| + \text{ث}$$

**ب** بوضع $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ ، $\text{ءع} = \text{س}^{-\frac{١}{٢}}\,\text{ءس}$

$\text{ءص} = \frac{١}{\text{س}}\,\text{ءس}$ ، $\text{ع} = ٢\text{س}^{\frac{١}{٢}}$

$$\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\sqrt{\text{س}}}\,\text{ءس} = ٢\sqrt{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int \frac{٢\text{س}^{\frac{١}{٢}}}{\text{س}}\,\text{ءس}$$

$$= ٢\sqrt{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - ٢\int \text{س}^{-\frac{١}{٢}}\,\text{ءس} = ٢\sqrt{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - ٤\text{س}^{\frac{١}{٢}} + \text{ث}$$

## إجابات حاول ان تحل ٨

**أ** بوضع $\text{ص} = ٣\,\text{س} + ٥$ ، $\text{ءع} = \text{هـ}^{-٢\text{س}}\,\text{ءس}$

$\text{ءص} = ٣\,\text{ءس}$ ، $\text{ع} = \frac{-١}{٢}\,\text{هـ}^{-٢\text{س}}$

$$\therefore \int \frac{٣\text{س}+٥}{\text{هـ}^{٢\text{س}}}\,\text{ءس} = \frac{-١}{٢}(٣\,\text{س}+٥)\,\text{هـ}^{-٢\text{س}} + \frac{٣}{٢}\int \text{هـ}^{-٢\text{س}}\,\text{ءس}$$

$$= \frac{-١}{٢}(٣\,\text{س}+٥)\,\text{هـ}^{-٢\text{س}} - \frac{٣}{٤}\text{هـ}^{-٢\text{س}} + \text{ث}$$

$$= \frac{-١}{٤}\text{هـ}^{-٢\text{س}}[٦\text{س} + ١٠ + ٣] + \text{ث}$$

$$= \frac{-١}{٤}\text{هـ}^{-٢\text{س}}(٦\text{س} + ١٣) + \text{ث}$$

**ب** بوضع $\text{ص} = \text{س}$ ، $\text{ءع} = (٢\text{س}+٣)^{-\frac{١}{٢}}\,\text{ءس}$

$\text{ءص} = \text{ءس}$ ، $\text{ع} = (٢\text{س}+٣)^{\frac{١}{٢}}$

$$\int \frac{\text{س}}{\sqrt{٢\,\text{س}+٣}}\,\text{ءس} = \text{س}\sqrt{٢\,\text{س}+٣} - \int (٢\text{س}+٣)^{\frac{١}{٢}}\,\text{ءس}$$

$$= \frac{١}{٣}(٢\,\text{س}+٣)^{\frac{١}{٢}}[٣\,\text{س} - (٢\,\text{س}+٣)] + \text{ث}$$

$$= \frac{١}{٣}(٢\,\text{س}+٣)^{\frac{١}{٢}}(\text{س}-٣) + \text{ث}$$

طرق التكامل ٤ - ١

لاحظ أن:
إختيار ص ، ءع يتوقف على:
١- ءص أبسط من ص
٢- ءع اسهل من التكامل

مثال — تكامل بالتجزيء

٧ أوجد
أ $\int \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\text{ءس}$ ب $\int \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\text{ءس}$

الحل

أ بفرض أن: $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ ، $\text{ءع} = \text{ءس}$ ، $\text{ءص} = \frac{١}{\text{س}}\text{ءس}$ ، $\text{ع} = \int \text{ءس} = \text{س}$

$\int \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\text{ءس} = \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int \text{س}\,\frac{١}{\text{س}}\,\text{ءس}$

$= \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \text{س} + \text{ث} = \text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - ١) + \text{ث}$

ب نفرض أن: $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ ، $\text{ءع} = \text{س}\,\text{ءس}$ ، $\text{ءص} = \frac{١}{\text{س}}\text{ءس}$ ، $\text{ع} = \int \text{س}\,\text{ءس} = \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}$

$\int \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\text{ءس} = \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int \frac{١}{٢}\text{س}^{٢} \times \frac{١}{\text{س}}\,\text{ءس}$

$= \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \frac{١}{٤}\text{س}^{٢} + \text{ث} = \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \frac{١}{٢}) + \text{ث}$

حاول أن تحل

٧ أوجد:
أ $\int \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+١)\,\text{ءس}$ ب $\int (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \div \sqrt{\text{س}})\,\text{ءس}$

مثال — تكامل بالتجزيء

٨ أوجد:
أ $\int \frac{\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}}{(\text{س}+١)^{٢}}\,\text{ءس}$ ب $\int \frac{\text{س}^{٤}}{\sqrt{\text{س}^{٢}+١}}\,\text{ءس}$

الحل

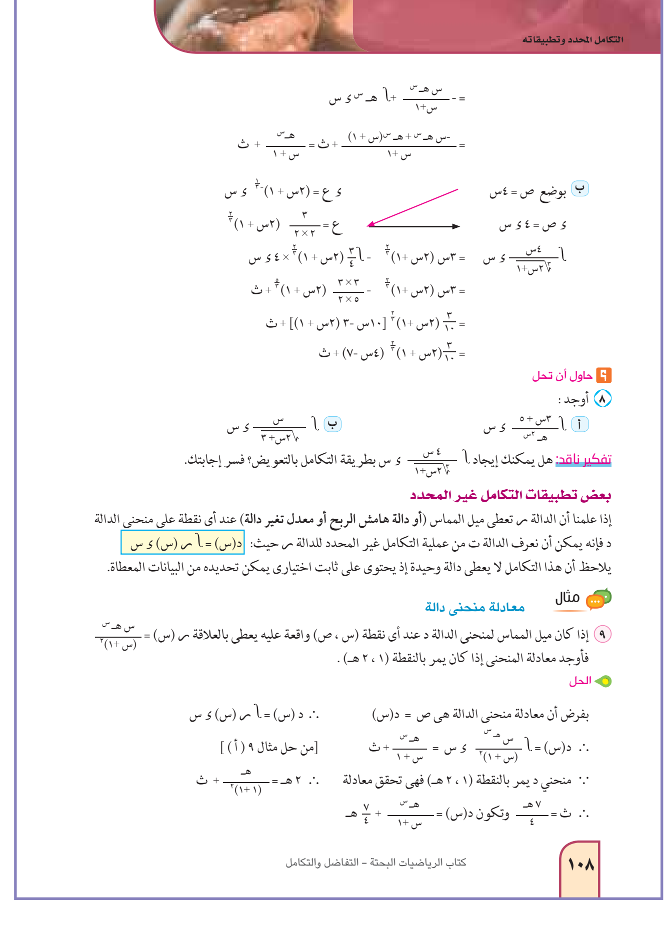
أ لاحظ أن $(\text{س}+١)^{-٢}$ أسهل في التكامل

بوضع $\text{ص} = \text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}$ ، $\text{ءع} = (\text{س}+١)^{-٢}\,\text{ءس}$

$\text{ءص} = (\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}})\,\text{ءس}$ ، $\text{ع} = \frac{-١}{\text{س}+١}$

$\int \frac{\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}}{(\text{س}+١)^{٢}}\,\text{ءس} = -\frac{\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س}+١} - \int \frac{-١}{\text{س}+١} \times \text{هـ}^{\text{س}}(\text{س}+١)\,\text{ءس}$





التكامل المحدد وتطبيقاته

$= -\frac{\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س}+١} + \int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس}$

$= \frac{-\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}}(\text{س}+١)}{\text{س}+١} + \text{ث} = \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س}+١} + \text{ث}$

ب بوضع $\text{ص} = \text{س}^{٤}$ ، $\text{ءع} = (٢\text{س}+١)^{-\frac{١}{٢}}\,\text{ءس}$ ، $\text{ءص} = ٤\,\text{س}^{٣}\,\text{ءس}$ ، $\text{ع} = \frac{٢}{٢\times٢}(٢\text{س}+١)^{\frac{١}{٢}}$

$\int \frac{\text{س}^{٤}}{\sqrt{٢\text{س}+١}}\,\text{ءس} = \text{س}^{٣}(٢\text{س}+١)^{\frac{١}{٢}} - \int \frac{٣}{٢}(٢\text{س}+١)^{\frac{١}{٢}} \times ٤\,\text{ءس}$

$= \text{س}^{٣}(٢\text{س}+١)^{\frac{١}{٢}} - \frac{٣\times٢}{٢\times٥}(٢\text{س}+١)^{\frac{٥}{٢}} + \text{ث}$

$= \frac{٣}{١٠}(٢\text{س}+١)^{\frac{١}{٢}}[١٠\text{س} - ٣(٢\text{س}+١)] + \text{ث}$

$= \frac{٣}{١٠}(٢\text{س}+١)^{\frac{١}{٢}}(٤\text{س} - ٧) + \text{ث}$

حاول أن تحل

٨ أوجد:
أ $\int \frac{٣\text{س}+٥}{\text{هـ}^{٢\text{س}}}\,\text{ءس}$ ب $\int \frac{\text{س}}{\sqrt{٢\text{س}+٣}}\,\text{ءس}$

تفكير ناقد: هل يمكنك إيجاد $\int \frac{\text{س}^{٤}}{\sqrt{\text{س}^{٢}+١}}\,\text{ءس}$ بطريقة التكامل بالتعويض؟ فسر إجابتك.

**بعض تطبيقات التكامل غير المحدد**

إذا علمنا أن الدالة ص تعطي ميل المماس (أو دالة هامش الربح أو معدل تغير دالة) عند أي نقطة على منحنى الدالة د فإنه يمكن أن نعرف الدالة ث من عملية التكامل غير المحدد للدالة ص حيث: $\text{د}(\text{س}) = \int \text{ص}(\text{س})\,\text{ءس}$

يلاحظ أن هذا التكامل لا يعطي على دالة وحيدة إذ يحتوي على ثابت اختياري يمكن تحديده من البيانات المعطاة.

مثال — معادلة منحنى دالة

٩ إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أي نقطة (س ، ص) واقعة عليه يعطي بالعلاقة $\text{ص}(\text{س}) = \frac{\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}}{(\text{س}+١)^{٢}}$

أوجد معادلة المنحنى إذا كان يمر بالنقطة (١ ، ٢ هـ).

الحل

بفرض أن معادلة منحنى الدالة هي ص = د(س) ∴ $\text{د}(\text{س}) = \int \text{ص}(\text{س})\,\text{ءس}$

∴ $\text{د}(\text{س}) = \int \frac{\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}}{(\text{س}+١)^{٢}}\,\text{ءس} = \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س}+١} + \text{ث}$ [من حل مثال ٩ (أ)]

∵ منحنى د يمر بالنقطة (١ ، ٢ هـ) فهي تحقق معادلة ∴ $٢\,\text{هـ} = \frac{\text{هـ}}{(١+١)} + \text{ث}$

∴ $\text{ث} = \frac{٧\,\text{هـ}}{٤}$ وتكون $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س}+١} + \frac{٧}{٤}\text{هـ}$

١٠٨ كتاب الرياضيات البحتة - التفاضل والتكامل

**حاول أن تحل**

(٩) أوجد معادلة المنحنى المار بالنقطة (٠ ، ١) والذى ميل المماس له عند أى نقطة (س ، ص) واقعة عليه يساوى $س\sqrt{س^{٢}+١}$

## تمارين ٤ - ١

**اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة**

(١) $\int س(س^{٢}+٣)^{٥}\,دس$ يساوى

أ $\frac{١}{٦}(س^{٢}+٣)^{٦}+ث$ ب $\frac{١}{١٢}(س^{٢}+٣)^{٦}+ث$ جـ $\frac{١}{٤}(س^{٢}+٣)^{٤}+ث$ د $\frac{١}{٨}(س^{٢}+٣)^{٤}+ث$

(٢) إذا كان $\int (٢س+٣)\,لو_{هـ} س\,دس = ص ع - \int ع\,دص$ فإن ص ع يساوى

أ $٢س\,لو_{هـ} س$ ب $(٢س+٣)\,لو_{هـ} س$ جـ $\frac{١}{٢}(٢س+٣)\,لو_{هـ} س$ د $س(س+٣)\,لو_{هـ} س$

(٣) إذا كان $\int (٢س-١)\,هـ^{٢س+٣}\,دس = ص ع - \int ع\,دص$ فإن $\int ع\,دص$

أ $هـ^{٢س+٣}+ث$ ب $\frac{١}{٢}هـ^{٢س+٣}+ث$ جـ $-هـ^{٢س+٣}+ث$ د $-\frac{١}{٢}هـ^{٢س+٣}+ث$

**باستخدام التعويض المناسب أوجد التكاملات الآتية:**

(٤) $\int س(س-٢)^{٤}\,دس$ (٥) $\int س^{٢}(س-٢)^{٣}\,دس$ (٦) $\int س^{٣}(س^{٢}-١)^{٥}\,دس$

(٧) $\int س\sqrt{س+٤}\,دس$ (٨) $\int (س^{٢}-١)\sqrt{س+١}\,دس$ (٩) $\int س^{٥}(س^{٢}+٣)^{٤}\,دس$

(١٠) $\int \frac{س}{٣س^{٢}+٢}\,دس$ (١١) $\int \frac{س}{س+١}\,دس$ (١٢) $\int \frac{س+١}{\sqrt{س-١}}\,دس$

(١٣) $\int \frac{س^{٢}}{\sqrt{٢س-١}}\,دس$ (١٤) $\int س\,هـ^{-س^{٢}}\,دس$ (١٥) $\int \frac{هـ^{-س}-١}{هـ^{-س}+س}\,دس$

(١٦) $\int لو_{هـ} ٥س\,\frac{دس}{س}$ (١٧) $\int (لو_{هـ} س)^{٣}\,\frac{دس}{س}$ (١٨) $\int \frac{١}{س\,لو_{هـ} س}\,دس$

**باستخدام التجزىء المناسب أوجد التكاملات الآتية:**

(١٩) $\int ٤س\,هـ^{٢س}\,دس$ (٢٠) $\int س^{٣}\,هـ^{س^{٢}}\,دس$ (٢١) $\int \frac{س}{هـ^{٢س}}\,دس$

(٢٢) $\int س^{٣}\,لو_{هـ} س\,دس$ (٢٣) $\int لو_{هـ} س^{٢}\,دس$ (٢٤) $\int (لو_{هـ} س)^{٢}\,دس$

(٢٥) $\int لو_{هـ} س\,\frac{دس}{س^{٣}}$ (٢٦) $\int (س+١)^{٢}\,هـ^{٢س}\,دس$ (٢٧) $\int س\,(لو_{هـ} س)^{٢}\,دس$

**أجب عن ما يأتى:**

(٢٨) أوجد معادلة المنحنى الذى ميل العمود عليه عند أى نقطة (س ، ص) هو ٣- س ويمر بالنقطة أ (٢ ، ٣).

(٢٩) اذا كان ميل المماس لمنحنى عند نقطة (س ، ص) واقعة عليه هو $س\sqrt{س+١}$ أوجد معادلة المنحنى علمًا بأن المنحنى يمر بالنقطة $(٠ ، \frac{١١}{١٥})$

(٣٠) أوجد معادلة المنحنى ص = د (س) إذا كان $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = أس + ب$ حيث أ ، ب ثابتان وللمنحنى نقطة انقلاب عند النقطة (٠ ، ٢) وقيمة صغرى محلية عند النقطة (١ ، ٠) ثم أوجد القيمة العظمى المحلية لهذا المنحنى.



## إجابات حاول ان تحل ٩

معادلة المنحنى هى $ص = \int س\sqrt{س^{٢}+١}\,دس$

$ص = \frac{١}{٢}\int ٢س\sqrt{س^{٢}+١}\,دس$

$= \frac{١}{٢}\times\frac{٢}{٣}(س^{٢}+١)^{\frac{٣}{٢}}+ث$

$ص = \frac{١}{٣}(س^{٢}+١)^{\frac{٣}{٢}}+ث$

$١ = \frac{١}{٣}+ث$

$ث = \frac{٢}{٣}$

$ص = \frac{١}{٣}(س^{٢}+١)^{\frac{٣}{٢}}+\frac{٢}{٣}$

## حلول تمارين الدرس (٤-١)

(١) ب (٢) د (٣) ب

(٦) بوضع: $ع = س^{٢}-١$ $\therefore دع = ٢س\,دس$

$س = (ع+١)^{\frac{١}{٢}}$ ، $دس = \frac{١}{٢س}\,دع$

$\int (ع+١)^{\frac{٣}{٢}}(ع)^{٥}\times\frac{١}{٢(ع+١)^{\frac{١}{٢}}}\,دع$

$\int \frac{١}{٢}ع^{٥}(ع+١)\,دع = \int(\frac{١}{٢}ع^{٦}+\frac{١}{٢}ع^{٥})\,دع$

$= \frac{١}{١٤}ع^{٧}+\frac{١}{١٢}ع^{٦}+ث$

$= \frac{١}{١٤}(س^{٢}-١)^{٧}+\frac{١}{١٢}(س^{٢}-١)^{٦}+ث$

(٨) بوضع $ع = س+١$ $\therefore س = ع-١$ $دس = دع$

$\int [(ع-١)^{٢}-١]\times ع^{\frac{١}{٢}}\,دع$

$\int [ع^{\frac{٥}{٢}}-٢ع^{\frac{٣}{٢}}]\,دع = \frac{٢}{٧}(س+١)^{\frac{٧}{٢}}-\frac{٤}{٥}(س+١)^{\frac{٥}{٢}}+ث$

(٩) بوضع $ع = س^{٢}+٣$ $\therefore دع = ٢س\,دس$

$س = (ع-٣)^{\frac{١}{٢}}$

$\int (ع-٣)^{\frac{٥}{٢}}\times ع^{٤}\times\frac{١}{٢(ع-٣)^{\frac{١}{٢}}}\,دع$

$\int \frac{١}{٢}(ع-٣)^{٢}ع^{٤}\,دع = \frac{١}{٢}\int(ع^{٦}-٦ع^{٥}+٩ع^{٤})\,دع$

$= \frac{١}{٢}(\frac{١}{٧}ع^{٧}-ع^{٦}+\frac{٩}{٥}ع^{٥})+ث$

$= \frac{١}{٢}ع^{٥}[(\frac{٥ع^{٢}-٣٥ع+٦٣}{٣٥})]\,ث$

$= \frac{١}{٧٠}(س^{٢}+٣)^{٥}[٥س^{٤}-٥س^{٢}+٣]+ث$

(١٤) بوضع: $ع = ٢س^{٢}-١$ $دع = ٤س\,دس$

$\int هـ^{ع}\times\frac{١}{٤}\,دع = \frac{١}{٤}هـ^{ع}+ث = \frac{١}{٤}هـ^{٢س^{٢}-١}+ث$

(١٥) بوضع: $ع = هـ^{-س}+س$ $\therefore دع = (-هـ^{-س}+١)\,دس$

$\int \frac{١}{ع}\times -دع = -لو_{هـ}|ع|+ث$

$= -لو_{هـ}|هـ^{-س}+س|+ث$

(١٧) بوضع $ع = لو_{هـ} س$ $دع = \frac{١}{س}\,دس$

$\therefore \int ع^{٣}\,دع = ع^{٤}+ث = \frac{١}{٤}(لو_{هـ} س)^{٤}+ث$

(٢٠) بوضع $ص = س^{٢}$ $دع = س\,هـ^{س^{٢}}\,دس$

$دص = ٢س\,دس$ $ع = \frac{١}{٢}هـ^{س^{٢}}$

$\int س^{٣}هـ^{س^{٢}}\,دس = \frac{١}{٢}س^{٢}هـ^{س^{٢}}-\int س\,هـ^{س^{٢}}\,دس$

$= \frac{١}{٢}س^{٢}هـ^{س^{٢}}-\frac{١}{٢}هـ^{س^{٢}}+ث$

$= \frac{١}{٢}هـ^{س^{٢}}(س^{٢}-١)+ث$

# ٤ - ٢

# تكامل الدوال المثلثية

## Integral of Trigonometric Functions

### ٤ - ٢ تكامل الدوال المثلثية

Integral of Trigonometric Functions

**سوف تتعلم**

- قواعد تكامل الدوال المثلثية

**المصطلحات الأساسية**

- قاعدة Rule
- دوال مثلثية Trigonometric Function
- جدول التكاملات Table of Integrals

**الأدوات المستخدمة**

- آلة حاسبة علمية

**فكر و ناقش**

ينحصر إيجاد تكامل أى دالة فى البحث عن دالة آخرى ت إذا استخرجت مشتقتها الأولى لنتجت الدالة د ، أى : د (س) = ى/ى س ت (س) وعلى ذلك فإن:

∫ د (س) ى س = ت (س) + ث    حيث ث ثابت اختيارى.

بين أى العلاقات التالية صحيحة:

أ ∫ جتا س ى س = جا س + ث    ب ∫ جا س ى س = جتا س + ث

ج ∫ قا$^2$ س ى س = ظا س + ث    د ∫ قتا$^2$ س ى س = ظتا س + ث

**لاحظ أن:** مقدار استيعابك للمشتقات الأولى للدوال المثلثية يساعدك فى إيجاد تكاملات هذه الدول

من دراستك السابقة لمشتقات الدوال المثلثية (كما فى تذكر) ، والجدول التالى لقواعد التكامل غير المحدد لبعض الدوال المثلثية ، قارن بين مشتقات الدوال المثلثية واستنتج تكاملاتها ثم أكمل الجدول.

| التكامل غير المحدد |
|---|
| ∫ جا س ى س = - جتا س + ث |
| ∫ جتا س ى س = جا س + ث |
| ∫ قا$^2$ س ى س = ظا س + ث |
| ∫ قتا$^2$ س ى س = |
| ∫ قا س ظا س ى س = |
| ∫ قتا س ظتا س ى س = |

**تذكر أن**

- ى/ى س (جا س) = جتا س
- ى/ى س (جتا س) = - جا س
- ى/ى س (ظا س) = قا$^2$ س
- ى/ى س (ظتا س) = - قتا$^2$ س
- ى/ى س (قا س) = قا س ظا س
- ى/ى س (قتا س) = - قتا س ظتا س

تحقق من صحة استنتاجك باستخدام تعريف المشتقة العكسية.



### خلفية :

سبق للطالب دراسة طرق التكامل غير المحدد وخواصه ، كما تعرف على مفهوم التفاضلى واستخدمه فى تكامل الدوال بطريقة التعويض وطريقة التجزئ وفى هذا الدرس سوف يتعرف على تكامل الدوال المثلثية الأساسية ومقلوبات هذه الدوال متضمنة طريقتى التعويض والتجزئ السابق دراستها.

### مخرجات تعلم الدرس :

فى نهاية هذا الدرس وتنفيذ الأنشطة فيه من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن :

- يتعرف قواعد تكامل الدوال المثلثية
- يستخدم قواعد التكامل فى حل تمارين على تكامل الدوال المثلثية .
- يحل مسائل تتضمن تطبيقات هندسية على تكامل الدوال المثلثية .

### مفردات أساسية

قاعدة - دوال مثلثية - جدول التكاملات

### المواد التعليمية المستخدمة

السبورة التعليمية - طباشير ملون - آلة حاسبة علمية - برامج رسومية للحاسوب .

### مكان التدريس :

الفصل الدراسى

### مصادر التعليم :

كتاب الطالب من ص (١١١) إلى ص (١١٦)

### تهيئة :

- ذكر الطلاب بأن التكامل هو عملية عكسية للأشتقاق ، فإذا كانت ت مشتقة عكسية للدالة د فإن :

  ∫ د (س) ى س = ت (س) + ث

حيث ث ثابت اختيارى

- اكد إلى الطلاب بأن مدى استيعاب الطالب وتذكره لمشتقات الدوال المثلثية يساعده فى إيجاد تكاملات هذه الدوال .

لذا ينبغى تذكير الطلاب جيدًا بمشتقات الدوال المثلثية الأساسية ومقلوبات هذه الدوال مع أعطاء بعض الأمثلة البسيطة عليها وذلك من خلال الجدول المدون فى اسفل ص (١١١).

### التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

- ناقش مع طلابك ما ورد فى بند حاول أن تحل ص (١١٢) ، ص (١١٣) وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة :

### إجابات حاول ان تحل

١ أ ∫ (جا س + قا$^2$ س) ى س = - جتا س + ظا س + ث

ب ∫ قا س (جتا$^2$ س + ظا س) ى س

$= \int \text{قاس جتا}^{٢}\text{س ءس} + \int \text{قا س طا س ءس}$

$\int \text{جتا س ءس} + \int \text{قا س طا س ءس} = \text{جا س} + \text{قا س} + \text{ث}$

**ج** $\int \text{قتا س (ظتا س - قتا س) ء س}$

$= \int \text{قتاس ظتا س ءس} - \int \text{قتا}^{٢}\text{س ء س}$

$= - \text{قتا س} + \text{ظتا س} + \text{ث}$

**د** $\int \frac{\text{جتا}^{٢}\text{س}}{\text{١ - جا س}} \text{ ءس} = \int \frac{\text{١ - جا}^{٢}\text{س}}{\text{١ - جاس}} \text{ ء س}$

$= \int \frac{\text{(١ - جاس) (١ + جاس)}}{\text{١ - جا س}} \text{ ء س}$

$= \int \text{(١ + جا س) ء س} = \text{س - جتا س + ث}$

**٢** **أ** $\int \text{(جا ٣س - قا}^{٢}\text{ ٢س) ء س}$

$= \int \text{جا ٣ س ء س} - \int \text{قا}^{٢}\text{ ٢ س ءس}$

$= - \frac{١}{٣} \text{ جتا ٣س} - \frac{١}{٢} \text{ ظا ٢ س + ث}$

**ب** $\int \text{٦ قا٢ س (ظا٢س + جتا}^{٢}\text{ ٢س) ء س}$

$= \int \text{٦ قا ٢ س ظا ٢ س ءس} + \int \text{٦ قا ٢ س جتا}^{٢}\text{ ٢ س ءس}$

$= \text{٣ قا ٢ س} + \int \text{٦ جتا ٢ س ء س}$

$= \text{٣ قا ٢ س + ٣ جا ٢ س + ث}$

**ج** $\int \text{[(١ + ظتا}^{٢}\text{ (٣س -١)] ء س}$

$= \int \text{قتا}^{٢}\text{ (٣ س -١) ءس} = - \frac{١}{٣} \text{ ظتا (٣ س -١) + ث}$

**د** $\int \frac{\text{جا}^{٢}\text{ (٢ س -٣)}}{\text{١ - جتا (٢ س -٣)}} \text{ ء س} = \int \text{(١ + جتا ٣ س) ءس}$

$= \text{س} + \frac{١}{٣} \text{ جا ٣ س + ث}$

**٥** $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٣} \pi \text{ جتا} \pi \text{س - ٢} \pi \text{ جا} \pi \text{ س}$

معادلة المنحنى $\text{ص = ٣ جا} \pi \text{س + ٢ جتا} \pi \text{س + ث}$

(١ ، ٢-) تحقق معادلة المنحنى

$\text{-٢ = ٣ جا} \pi \text{ + ٢ جتا} \pi \text{ + ث}$ ث = -٤

$\text{ص = ٣ جا} \pi \text{ س + ٢ جتا} \pi \text{ س -٤}$



### مثال
**جدول التكامل**

١ أوجد التكاملات التالية:

أ $\int \text{(جا س + جتا س) ء س}$ ب $\int \text{قا س (قا س - ظا س) ء س}$

ج $\int \frac{١}{\text{١ - جتا}^{٢}\text{س}} \text{ ء س}$ د $\int \frac{\text{جتا س}}{\text{١ - جتا}^{٢}\text{س}} \text{ ء س}$

**الحل**

أ $\int \text{(جا س + جتا س) ء س} = \int \text{جا س ء س} + \int \text{جتا س ء س}$

$= \text{- جتا س + جا س + ث}$

ب $\int \text{(قا س - ظا س) قا س ء س} = \int \text{قا}^{٢}\text{ س ء س} - \int \text{قا س ظا س ء س}$

$= \text{ظا س - قا س + ث}$

ج $\int \frac{١}{\text{١ - جتا}^{٢}\text{س}} \text{ ء س} = \int \frac{١}{\text{جا}^{٢}\text{س}} \text{ ء س} = \int \text{قتا}^{٢}\text{ س ء س = - ظتا س + ث}$

د $\int \frac{\text{جتا س}}{\text{١ - جتا}^{٢}\text{س}} \text{ ء س} = \int \frac{\text{جتا س}}{\text{جا}^{٢}\text{س}} \text{ ء س} = \int \frac{١}{\text{جا س}} \times \frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}} \text{ ءس}$

$= \int \text{قتا س ظتا س ء س = - قتا س + ث}$

**تذكر أن**

$\text{جتا}^{٢}\text{ س + جا}^{٢}\text{ س = ١}$

$\text{١ + ظا}^{٢}\text{ س = قا}^{٢}\text{س}$

$\text{ظتا}^{٢}\text{ س + ١ = قتا}^{٢}\text{ س}$

**حاول أن تحل**

١ أوجد:

أ $\int \text{(جا س + قا}^{٢}\text{ س) ء س}$ ب $\int \text{قا س (جتا}^{٢}\text{س + ظا س) ء س}$

ج $\int \text{قتا س (ظتا س - قتا س) ء س}$ د $\int \frac{\text{جتا}^{٢}\text{ س}}{\text{١ - جا س}} \text{ ء س}$

**ملاحظة هامة:**

نعلم أن: $\int \text{س}^{\text{ن}} \text{ ء س} = \frac{\text{س}^{\text{ن+١}}}{\text{ن + ١}} \text{ + ث}$ (١) ، $\int \text{جا س ء س = - جتا س + ث}$ (٢)

ولتعميم النتائج السابقة أو جميع الصور القياسية للتكامل نلاحظ أنه بإضافة ثابت إلى المتغير المستقل س لا يؤثر على صيغة التكامل ، كماأن ضرب س فى المعامل أ فإن التكامل يحتفظ بصيغته السابقة إلا أنه يقسم على هذا المعامل.

لذلك نجد أن الصورة السابقة لكل من ١ ، ٢ هي:

$\int \text{(أ س + ب)}^{\text{ن}} \text{ ء س} = \frac{\text{(أ س + ب)}^{\text{ن+١}}}{\text{أ(ن + ١)}} \text{ + ث}$

، $\int \text{جا (أ س + ب) ء س} = - \frac{١}{\text{أ}} \text{ جتا (أ س + ب) + ث}$







### مثال
**الصور القياسية للتكامل**

٢ أوجد :

أ $\int \text{جا (٢س -٥) ء س}$ ب $\int \text{قا}^{٢}\text{ (٥ - ٣س) ء س}$

ج $\int \text{قتا}^{٢} \left(\frac{\text{س + ٣}}{٢}\right) \text{ ء س}$ د $\int \text{قا ٢س طا ٢س ء س}$

**الحل**

أ $\int \text{جا (٢س -٥) ء س} = - \frac{١}{٢} \text{ جتا (٢س - ٥) + ث}$

ب $\int \text{قا}^{٢}\text{ (٥ - ٣س) ء س} = - \frac{١}{٣} \text{ ظا (٥ - ٣س) + ث}$

ج $\int \text{قتا}^{٢} \left(\frac{١}{٢} \text{ س} + \frac{٣}{٢}\right) \text{ ء س = -٢ ظتا} \left(\frac{\text{س + ٣}}{٢}\right) \text{ + ث}$

د $\int \text{قا ٢ س ظا ٢س ء س} = \frac{١}{٢} \text{ قا ٢ س + ث}$

**حاول أن تحل**

٢ أوجد :

أ $\int \text{(جا ٣س - قا}^{٢}\text{ ٢س) ء س}$ ب $\int \text{٦ قا٢ س (ظا٢س + جتا}^{٢}\text{ ٢س) ء س}$

ج $\int \text{[(١ + ظتا}^{٢}\text{ (٣س -١)] ء س}$ د $\int \frac{\text{جا}^{٢}\text{ (٢ س -٣)}}{\text{١ - جتا (٢ س -٣)}} \text{ ء س}$

### مثال
**تطبيقات**

٣ اذا كان ميل المماس لمنحنى عند أى نقطة عليه (س ، ص) معطى بالعلاقة:

$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \text{جا س جتا س}$ ، أوجد معادلة المنحنى علمًا بأنه يمر بالنقطة $\left(\frac{\pi}{٦} \text{ ، ١}\right)$

**الحل**

∵ ميل مماس المنحنى عند أى نقطة: $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \text{جا س جتا س}$

∴ معادلة المنحنى : $\text{ص} = \int \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} \text{ . ء س} = \int \text{جا س جتا س ء س}$

$= \frac{١}{٢} \int \text{٢ جا س جتا سء س} = \frac{١}{٢} \int \text{جا٢ س ء س}$

$= \frac{١}{٢} \times - \frac{١}{٢} \text{ جتا ٢ س + ث} = - \frac{١}{٤} \text{ جتا ٢س +ث}$

∵ المنحنى يمر بالنقطة $\left(\frac{\pi}{٦} \text{ ، ١}\right)$

∴ فهى تحقق معادلة

$\text{١} = - \frac{١}{٤} \text{ جتا} \left(\text{٢} \times \frac{\pi}{٦}\right) \text{ + ث}$ ∴ $\text{ث} = \text{١} + \frac{١}{٨} = \frac{٩}{٨}$

∴ معادلة المنحنى هى : $\text{ص} = - \frac{١}{٤} \text{ جتا ٢س} + \frac{٩}{٨}$

**تذكر أن**

$\text{جا ٢س = ٢ جا س جتا س}$

$\text{جتا ٢ س = جتا}^{٢}\text{ س - جا}^{٢}\text{ س}$

$\text{= ١ - ٢ جا}^{٢}\text{س}$

$\text{= ٢ جتا}^{٢}\text{ س -١}$

## حلول تمارين الدرس (٤ - ٢)

(١) د (٢) جـ

(٣) ب (٤) د

(١٠) $\int$ (جا س - جتا س)$^{٢}$ ى س

= $\int$ (جا$^{٢}$ س + جتا$^{٢}$ س - ٢ جا س جتا س ) ى س

= $\int$ (١ - جا ٢ س) ى س = س + $\frac{١}{٢}$ جتا ٢ س + ث

(١٢) $\int$ جا$^{٥}$ س جتا س ى س = $\frac{١}{٦}$ (جا$^{٦}$ س) + ث

(١٣) $\int$ س$^{٢}$ جتا (س$^{٣}$ + ٥) ى س

ع = س$^{٣}$ + ٣ ى ع = ٣س$^{٢}$ ى س

$\int$ جتا ع × $\frac{١}{٣}$ ى ع = $\frac{١}{٣}$ جا ع + ث = $\frac{١}{٣}$ جا (س$^{٣}$ + ٣) + ث

(١٦) $\int$ جتا س - ٤ قا$^{٢}$ س ى س

= جا س - ٤ ظا س + ث

(١٨) $\int$ (قا$^{٢}$ س + ١ + ٢ جا$^{٢}$ س) ى س

$\int$ (قا$^{٢}$ س- جتا ٢ س) ى س = ظا س - $\frac{١}{٢}$ جا ٢ س + ث

(٢١) ص = $\int$ (٢س + $\frac{١}{٢}$ قا$^{٢}$ $\frac{س}{٢}$ ) ى س

ص = س$^{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ × ٢ ظا $\frac{١}{٢}$ س + ث

$\frac{\pi^{٢}}{٤}$ + ٩ = $\frac{\pi^{٢}}{٤}$ + ظا $\frac{\pi}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$ + ث

ث = ٨

ص = س$^{٢}$ + ظا $\frac{١}{٢}$ س + ٨

(٢٢) ص = $\int$ - أ قتا$^{٢}$ س ى س

ص = أ ظتا س + ث

٥ = أ ظتا $\frac{\pi}{٤}$ + ث

∴ أ + ث = ٥

٢= أ ظتا صفر + ث

تكامل الدوال المثلثية ٤ - ٢

حاول أن تحل

(٣) أوجد معادلة المنحنى الذى يمر بالنقطة (١ ، -٢) وميله المماس له عند أى نقطة عليه (س ، ص) هو:

$\frac{ى ص}{ى س}$ = ٣ $\pi$ جتا $\pi$ س - ٢ $\pi$ جا $\pi$ س

### تمـــاريـن ٤- ٢

**اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة**

(١) اذا كانت $\frac{ى ص}{ى س}$ = قتا$^{٢}$ س ، ص = ٢ عند س = $\frac{\pi}{٤}$ فإن ص تساوى

أ - ٢ - ظتا س ب ٢ - ظتا س جـ -٣ - ظتا س د ٣ - ظتا س

(٢) $\int$ ٢ جتا$^{٢}$س ى س يساوى

أ س + $\frac{١}{٢}$ جا٢س + ث ب س + ٢ جا ٢ س + ث

جـ س - $\frac{١}{٢}$ جا ٢ س + ث د س - جا ٢س + ث

(٣) $\int$ قا$^{٤}$ س ظا س ى س تساوى

أ $\frac{١}{٥}$ قا$^{٥}$س + ث ب $\frac{١}{٤}$ قا$^{٤}$ س + ث

جـ $\frac{١}{٣}$ ظا$^{٣}$ س + ث د - $\frac{١}{٣}$ ظا$^{٣}$ س + ث

(٤) $\int$ (٣س + ٢) جا س ى س تساوى

أ (٣ س + ٢) جتا س + ٣ جا س + ث ب - (٣س + ٢) جتا س + ٣ جا س + ث

جـ (٣س + ١) جتا س + ٢ جا س + ث د - (س +١) جتا س - ٢ جا س + ث

**أوجد التكاملات الآتية:**

(٥) $\int$ $\sqrt{٣}$ جتا س ى س (٦) $\int$ قتا$^{٢}$ (٢س + ٣) ى س (٧) $\int$ ظا س جتا س ى س

(٨) $\int$ جا س جتا س ى س (٩) $\int$ (١ + ظا$^{٢}$س) جتا$^{٢}$ س ى س (١٠) $\int$ (جا س - جتا س)$^{٢}$ ى س

(١١) $\int$ جتا$^{٣}$ س جا س ى س (١٢) $\int$ جا$^{٥}$ س جتا س ى س (١٣) $\int$ س$^{٢}$ جتا (س$^{٣}$ + ٥) ى س

(١٤) $\int$ (٣ + جاس)$^{٥}$ جتا س ى س (١٥) $\int$ قا$^{٥}$ س ظا س ى س (١٦) $\int$ $\frac{\text{جتا}^{٣}\text{ س - ٤}}{\text{جتا}^{٢}\text{ س}}$ ى س

(١٧) $\int$ (جتا س + قا س)$^{٢}$ى س (١٨) $\int$ (ظا$^{٢}$ س + ٢ جا$^{٢}$ س) ى س (١٩) $\int$ (جتا$^{٢}$س + جتا س) ى س

**أجب عن ما يأتى**

(٢٠) إذا كان $\frac{ى ص}{ى س}$ = ٧ - جا٢ س اوجد ص بدلالة س إذا كان ص = ٥ عند س= ٠

(٢١) أوجد معادلة المنحنى الذى يمر بالنقطة ($\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi^{٢}}{٤}$ + ٩) إذا كان ميل المماس له عند أى نقطة (س ، ص) عليه يعطى بالعلاقة التالية: م = ٢س + $\frac{١}{٢}$ قا$^{٢}$ $\frac{س}{٢}$

(٢٢) منحنى ميل المماس عند أى نقطة يساوى - أ قتا$^{٢}$ س حيث أ ثابت فإذا كان المنحنى يمر بالنقطتين ($\frac{\pi}{٤}$ ، ٥) ، (٠ ، ٢) أوجد معادلة المنحنى.

١١٣ كتاب الطالب - الصف الثالث الثانوى

# ٤ - ٣

# التكامل المحدد

## The Definite Integral

> ٤ - ٣ التكامل المحدد
>
> The Definite Integral
>
> **فكر و ناقش**
>
> تعطى التكلفة الكلية لمنتج بالدالة ك، و هامش تكلفة هذا المنتج بالعلاقة
>
> كَ(س) = ٧ - ٢,٠س ، ٠ ⩽ س ⩽ ١٠
>
> حيث تقدر كَ بالآف الجنيهات، س الكمية المنتجة بمئات الوحدات يوميًّا.
>
> إذا تغير عدد الوحدات المنتجة من ٢٠٠ وحدة إلى ٥٠٠ وحدة يوميًّا ما هو التغير فى التكاليف الكلية لهذا المنتج؟ فسر إجابتك.
>
> **لاحظ أن**
>
> - س تعبر عن الكمية المنتجة بمئات الوحدات. عندما يتغير عدد الوحدات من ٢٠٠ إلى ٥٠٠ وحدة يوميًّا فإن س تتغير من ٢ إلى ٥.
>   عندما تتغير س من ٢ إلى ٥، فإن التغير فى دالة التكاليف الكلية ك يساوى
>   ك(٥) - ك(٢) (١)
> - تتعين دالة التكاليف ك من العلاقة: ك(س) = ∫ كَ (س) ى س حيث
>   ك (س) = ∫ (٧ - ٢,٠س) ى س = ٧س - ١,٠س$^{٢}$ + ث (٢)
> - من العلاقة (٢) نجد أن ك (٥) - ك (٢) يساوى:
>   [٧(٥) - ١,٠ (٥)$^{٢}$ + ث] - [٧(٢) - ١,٠(٢)$^{٢}$ + ث] = ١٨,٩ ألف جنيه.
>   ولا يعتمد على قيمة الثابت ث.
>
> فى ضوء ما سبق نجد أن التكاليف الكلية حُسبت باستخدام المشتقة العكسية للدالة كَ والتى رمز لها بالرمز ∫ كَ (س) ى س، ويمكن التعبير رمزيًّا عن تغير التكاليف الكلية عندما تتغير س من س = ٢ إلى س = ٥ هكذا:
>
> ∫ كَ (س) ى س = ك (٥) - ك (٢)
>
> وتعرف هذه الصورة بالتكامل المحدد.
>
> **سوف تتعلم**
>
> - مفهوم التكامل المحدد.
> - استخدام النظرية الأساسية فى التفاضل والتكامل لإيجاد التكامل المحدد.
> - بعض خواص التكامل المحدد.
> - العلاقة بين التفاضل والتكامل.
>
> **المصطلحات الأساسية**
>
> - تكامل محدد Definite Integral
>
> **الأدوات المستخدمة**
>
> - آلة حاسبة علمية
> - برامج رسومية
>
> ١١٤ كتاب الرياضيات البحتة - التفاضل والتكامل

### خلفية:

ذكرنا فيما سبق تكامل دَ(س) بالنسبة إلى س بأنه هى دالة د(س) + ث وهو ناتج غير معين لعدم تحديد قيمة الثابت ث وهو ما دعانا للقول بأنه تكامل غير محدد، فإذا كان لدينا (أ ، ب) حيث أ < ب فعندما س = أ فأن الناتج هو د(أ) + ث وعندما س= ب فإن الناتج هو د(ب) + ث فإذا حسبنا الفرق بينهما نجد أنه = د(ب) - د(أ) وهى لا تعتمد على الثابت ث لذا فإن:

∫ دَ(س) ى س = د (ب) - د ( أ )

وفي هذا الدرس سوف نتناول:

- النظرية الأساسية لحساب التكامل
- حساب قيمة تكامل محدد بالتعويض
- التكامل المحدد للدوال الفردية والزوجية
- العلاقة بين التفاصل والتكامل

### مخرجات تعلم الدرس :

في نهاية هذا الدرس وتنفيذ الأنشطة فيه من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا علي أن:

- يتقن مفهوم التكامل المحدد.
- يستخدم النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل لإيجاد التكامل المحدد.
- يتعرف على بعض خواص التكامل المحدد.
- يبين العلاقة بين التفاضل والتكامل.

### مفردات أساسية

تكامل محدد

### المواد التعليمية المستخدمة

السبورة التعليمية - طباشير ملون - آلة حاسبة علمية - برامج رسومية للحاسوب

### مكان التدريس

الفصل الدراسى

### مصادر التعلم

الكتاب المدرسي من ص (١١٧) إلى ص (١٢٦)

### تهيئة

- ناقش مع الطلاب ما ورد في بند فكر وناقش وتوصل معهم إلى أن حساب التكاليف الكلية ك يمكن كتابتها بالعلاقة

ك = ∫$_{٢}^{٥}$ كَ(س) ى س = ك (٥) - ك (٢) حيث تسمى هذه الصورة بالتكامل المحدد ثم توصل معهم إلى أن كانت د متصلة على نفس الفترة فإن:

∫$_{أ}^{ب}$ د(س) ى س = ت (ب) - ت ( أ )

## الربط مع التكنولوجيا

### في مثال (١)

$$\int_{-٢}^{٤} (٣س^{٢} - ٢)\ ء س = ٦٠$$

يمكن استخدام الآلة الحاسبة العلمية لأيجاد الناتج على النحو الآتي

[∫□] ( 3 ALPHA (x) x² − 2 ▼ - 2 ▲ 4 ) =

### أخطاء شائعة

قد يخطئ بعض الطلاب في كتابة حدود التكامل من اسفل إلى أعلى

اكد على الطلاب بأنه $\int_{أ}^{ب} د(س)\ ء س = ت(ب) - ت(أ)$

## التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

⌑ ناقش مع طلابك ما ورد فى بند حاول أن تحل وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة.

(١) أ $\int_{-١}^{٢} (٢س + ٣)\ ء س = [س^{٢} + ٣س]_{-١}^{٢}$

$= [(٤ + ٦) - (١ - ٣)] = ١٢$

ب $\int_{٠}^{٥} \frac{٣}{\sqrt{ن + ٤}}\ ء س = ٦$  ج $\int_{-\frac{\pi}{٢}}^{\frac{\pi}{٢}} جتا\,\theta\ ء\theta = ٢$

### في بند تفكير ناقد ص (١٢٣)

التكامل غير المحدد هو ناتج غير معين لعدم تحديد قيمة الثابت ث بينما التكامل المحدد هو قيمة محددة لأنها لا تعتمد على ثابت التكامل

(٢) $\int_{-١}^{٤} د(س)\ ء س = \int_{-١}^{٢} د(س)\ ء س + \int_{٢}^{٤} د(س)\ ء س$

$٢٥٥ = ١٥ + \int_{٢}^{٤} د(س)\ ء س$

$\int_{٢}^{٤} د(س)\ ء س = ٢٤٠$

(٣) أ $\int_{-٤}^{٢} |س + ١|\ ء س = \int_{-٤}^{-١} |س + ١|\ ء س$

$+ \int_{-١}^{٢} |س + ١|\ ء س$

$= \int_{-٤}^{-١} (س + ١)\ ء س + \int_{-١}^{٢} (س + ١)\ ء س$

$= -(-\frac{٩}{٢}) - ٠ = \frac{٩}{٢}$

ب $\int_{-٣}^{٢} (س^{٢} - ٤)\ ء س - \int_{-٢}^{٢} (س^{٢} - ٤)\ ء س$

$+ \int_{٢}^{٣} (س^{٢} - ٤)\ ء س = \frac{٧}{٣} + \frac{٣٢}{٣} + \frac{٧}{٣} = \frac{٤٦}{٣}$

(لاحظ أن الدالة زوجية)

---



### تعلم

#### النظرية الأساسية فى التفاضل — Foundamental Theorem of Calculus

إذا كانت الدالة د متصلة على الفترة [أ ، ب] ، وكانت ت أى مشتقة عكسية للدالة د على نفس الفترة، فإن:

$$\int_{أ}^{ب} د(س)\ ء س = ت(ب) - ت(أ)$$

ملاحظات:

١ يسمى $\int_{أ}^{ب} د(س)\ ء س$ بالتكامل المحدد، ويقرأ تكامل د(س) بالنسبة إلى س من أ إلى ب، وهو عدد حقيقى تتوقف قيمته على:

أ الحدان السفلى والعلوى للتكامل المحدد أى على العددين أ، ب على الترتيب.

ب قاعدة الدالة د

أما رمز المتغير س فيمكن استبداله بأى رمز آخر دون أن يؤثر ذلك على مقدار التكامل، أى أن:

$\int_{أ}^{ب} د(س)\ ء س = \int_{أ}^{ب} د(ص)\ ء ص = \int_{أ}^{ب} د(ع)\ ء ع$ ......

ولذلك نكتب أحيانًا

$\int_{أ}^{ب} د(س)\ ء س = \int_{أ}^{ب} د$

٢ يعبر عن ت(ب) - ت(أ) بالصورة $[ت(س)]_{أ}^{ب}$ أو $ت(س)\,|_{أ}^{ب}$

٣ يمكن الحصول على التكامل المحدد بإيجاد التكامل غير المحدد مع إهمال ثابت التكامل (لماذا)؟ ثم التعويض عن المتغير بحدى التكامل.

٤ تطبق جميع قواعد التكامل غير المحدد وجدول التكاملات القياسية عند إيجاد قيمة التكامل المحدد لدالة متصلة، فإذا كانت د، ر دالتين متصلتين على الفترة [أ، ب]

فإن:

- $\int_{أ}^{ب} [د(س) \pm ر(س)]\ ء س = \int_{أ}^{ب} د(س)\ ء س \pm \int_{أ}^{ب} ر(س)\ ء س$
- $\int_{أ}^{ب} ك\,د(س)\ ء س = ك \int_{أ}^{ب} د(س)\ ء س$ حيث ك $\in$ ع

مثال — حساب قيمة تكامل محدد

(١) أوجد التكامل المحدد للدالة د من س = -٢ إلى س = ٤ حيث د(س) = ٣س$^{٢}$ - ٢





الحل

الدالة د كثيرة الحددود متصلة على ع

$\therefore \int_{-٢}^{٤} (٣س^{٢} - ٢)\ ء س = [س^{٣} - ٢س]_{-٢}^{٤}$

$= [(٤)^{٣} - ٢(٤)] - [(-٢)^{٣} - (-٤)]$

$= ٦٤ - ٨ + ٨ - ٤ = ٦٠ \in ع$

حاول أن تحل

(١) أوجد قيمة كل مما يأتى:

أ $\int_{-١}^{٢} (٢س + ٣)\ ء س$  ب $\int_{٠}^{٥} \frac{٣}{\sqrt{ن + ٤}}\ ء ن$  ج $\int_{-\frac{\pi}{٢}}^{\frac{\pi}{٢}} جتا\,\theta\ ء\theta$

نظرية: إذا كانت الدالة د متصلة على الفترة [أ، ب] فإنها تكون قابلة للتكامل على هذه الفترة.

تفكير ناقد

ما الفرق بين التكامل المحدد والمتكامل غير المحدد؟ فسر إجابتك.

#### خواص التكامل المحدد — Properties of Definite Integral

إذا كانت د دالة متصلة على [أ، ب]، جـ $\in$ ] أ، ب [، فإن:

١- $\int_{ب}^{أ} د(س)\ ء س = -\int_{أ}^{ب} د(س)\ ء س$

٢- $\int_{أ}^{أ} د(س)\ ء س = ٠$

٣- $\int_{أ}^{ب} د(س)\ ء س = \int_{أ}^{جـ} د(س)\ ء س + \int_{جـ}^{ب} د(س)\ ء س$

مثال — حساب قيمة تكامل محدد

(٢) إذا كانت د دالة متصلة على ع، $\int_{١}^{٣} د(س)\ ء س = ٦$ ، $\int_{٥}^{٣} د(س) = -١٤$ أوجد $\int_{١}^{٥} د(س)\ ء س$

الحل

$\because$ د متصلة على ع ، س = ٣ تجزىء الفترة [١، ٥]

$\therefore \int_{١}^{٥} د(س)\ ء س = \int_{١}^{٣} د(س)\ ء س + \int_{٣}^{٥} د(س)\ ء س$ خاصية (٣)

$= \int_{١}^{٣} د(س)\ ء س - \int_{٥}^{٣} د(س)\ ء س$ خاصية (١)

$= ٦ - (-١٤) = ٢٠$

حاول أن تحل

(٢) إذا كانت د دالة متصلة على ع، $\int_{-١}^{٤} د(س)\ ء س = ٢٥٥$، $\int_{٢}^{-١} د(س)\ ء س = -١٥$ فأوجد: $\int_{٢}^{٤} د(س)\ ء س$

## التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

**٤** أ $\frac{١}{٢}\int_{٠}^{٥} -٢\text{س}(٢٥-\text{س}^{٢})^{\frac{١}{٢}}\,\text{ء س}$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{٢}{٣}\left[(٢٥-\text{س}^{٢})^{\frac{٣}{٢}}\right]_{٠}^{٥} = \frac{١٢٥}{٣}$

ب $\int_{-٢}^{٢} \text{س}^{٣}\sqrt{\text{س}^{٢}+٣}\,\text{ء س} = \text{صفر}$

لاحظ أن الدالة فردية

المساحة الموجبة + نفس المساحة السالبة = صفر

⌑ أشر إلى طلابك ملاحظة حل المسائل التي تكون فيها الدالة فردية والتي تكون فيها زوجية

- إذا كانت الدالة فردية على [-أ ، أ]

$\int_{-\text{أ}}^{\text{أ}} \text{د(س)}\,\text{ء س} = \text{صفر}$

- إذا كانت الدالة الزوجية على [-أ ، أ]

فأن $\int_{-\text{أ}}^{\text{أ}} \text{د(س)}\,\text{ء س} = ٢\int_{٠}^{\text{أ}} \text{د(س)}\,\text{ء س}$

### في بند تفكير ناقد

يهدف إلى تنمية مهارات الطالب في تكامل حالات خاصة من الدوال وهي الزوجية والفردية

## التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

**٥** أ $\because \text{د(-س)} = \frac{-\text{س}}{١+(-\text{س})^{٢}} = \frac{-\text{س}}{١+\text{س}^{٢}}$

$\because \text{د(-س)} = -\ \text{د(س)}$ الدالة فردية

$\int_{-٣}^{٣} \text{د(س)}\,\text{ء س} = \text{صفر}$

ب $\because \text{د(-س)} = ٤ + \pi \text{ جتا } (-٢\text{س})$

$= ٤ + \pi \text{ جتا } ٢\text{س}$ دالة زوجية

$\int_{-\pi}^{\pi} (٤+\pi \text{ جتا } ٢\text{س})\,\text{ء س}$

$= [٤\pi + \frac{\pi}{٢} \times ٠] = ٨\pi$

---



### مثال حساب قيمة تكامل محدد

③ أوجد $\int_{٠}^{٥} |\text{س}-٣|\,\text{ء س}$

**الحل**

من تعريف دالة المقياس نجد أن $|\text{س}-٣| = \begin{cases} -(\text{س}-٣) & \text{عندما س} < ٣ \\ \text{س}-٣ & \text{عندما س} \geq ٣ \end{cases}$ ، د متصلة عند س = ٣

$\int_{٠}^{٥} |\text{س}-٣|\,\text{ء س} = \int_{٠}^{٣} |\text{س}-٣|\,\text{ء س} + \int_{٣}^{٥} |\text{س}-٣|\,\text{ء س}$

$= \int_{٠}^{٣} (٣-\text{س})\,\text{ء س} + \int_{٣}^{٥} (\text{س}-٣)\,\text{ء س}$

$= [٣\text{س} - \frac{\text{س}^{٢}}{٢}]_{٠}^{٣} + [\frac{\text{س}^{٢}}{٢} - ٣\text{س}]_{٣}^{٥}$

$= (٩ - \frac{٩}{٢}) + (\frac{٢٥}{٢} - ١٥ - \frac{٩}{٢} + ٩) = \frac{١٣}{٢}$

د(س) = |س - ٣|

لاحظ أن المساحة الملونة تساوى $\frac{١٣}{٢}$ وحدة مربعة

**حاول أن تحل**

③ أوجد:

أ $\int_{-٤}^{٢} |\text{س}+١|\,\text{ء س}$ ب $\int_{-٣}^{٣} |\text{س}^{٢}-٤|\,\text{ء س}$

### مثال حساب قيمة تكامل محدد بالتعويض

④ أوجد قيمة $\int_{٠}^{٣} \text{س}\sqrt{\text{س}^{٢}+٣}\,\text{ء س}$

**الحل**

يمكن الحصول على التكامل المحدد بإيجاد المتكامل غير المحدد أولًا، ثم التعويض عن المتغير س بحدى التكامل:

**أولًا:**

لإيجاد $\int \text{س}\sqrt{\text{س}^{٢}+٣}\,\text{ء س}$ نضع ع = س² + ٣ $\therefore$ ء ع = ٢س ء س

$\therefore \int \text{س}\sqrt{\text{س}^{٢}+٣}\,\text{ء س} = \frac{١}{٢}\int \sqrt{\text{س}^{٢}+٣}\,(٢\text{س ء س}) = \frac{١}{٢}\int \sqrt{\text{ع}}\,\text{ء ع}$ (تعويض)

$= \frac{١}{٢}\int \text{ع}^{\frac{١}{٢}}\,\text{ء ع} = \frac{١}{٢} \times \frac{٢}{٣}\text{ع}^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$ (تكامل)

$= \frac{١}{٣}\sqrt{(\text{س}^{٢}+٣)^{٣}} + \text{ث}$ (تعويض عن ع)

**ثانيًا:**

$\int_{٠}^{٣} \sqrt{\text{س}^{٢}+٣}\,\text{ء س} = [\frac{١}{٣}\sqrt{(\text{س}^{٢}+٣)^{٣}}]_{٠}^{٣}$

$\frac{١}{٣}[\sqrt{(١٢)^{٣}} - \sqrt{(٣)^{٣}}] = ٧\sqrt{٣}$





**حاول أن تحل**

④ أوجد:

أ $\int_{٠}^{٥} \text{س}\sqrt{٢٥-\text{س}^{٢}}\,\text{ء س}$ ب $\int_{-٢}^{٢} \text{س}^{٣}\sqrt{\text{س}^{٢}+٣}\,\text{ء س}$

**لاحظ أن**

١- يمكن حل مثال ٤ مباشرة بإيجاد قيم ع المناظرة لقيم حدى المتكامل (س = ٠ ، س = ٣)

عند س = ٠ $\therefore$ ع = ٣ ، عند س = ٣ ع = ١٢

$\therefore \int_{٠}^{٣} \text{س}\sqrt{\text{س}^{٢}+٣}\,\text{ء س} = \frac{١}{٢}\int_{٣}^{١٢} \text{ع}^{\frac{١}{٢}}\,\text{ء س} = [\frac{١}{٣}\text{ع}^{\frac{٣}{٢}}]_{٣}^{١٢}$

$= \frac{١}{٣}[\sqrt{(١٢)^{٣}} - \sqrt{(٣)^{٣}}] = ٧\sqrt{٣}$

٢- فى بند **حاول أن تحل** ٤ ب: د(س) = س³ $\sqrt{\text{س}^{٢}+٣}$ دالة فردية

وفى بند **حاول أن تحل** ٣ب: د(س) = |س² - ٤| دالة زوجية

للدوال الفردية والدوال الزوجية فى التكامل المحدد الخواص التالية:

> ١- إذا كانت الدالة د متصلة وفردية على الفترة [-أ ، أ] فإن:
>
> $\int_{-\text{أ}}^{\text{أ}} \text{د(س)}\,\text{ء س} = \text{صفرًا}$
>
> ٢- إذا كانت الدالة د متصلة وزوجية على الفترة [-أ ، أ] فإن:
>
> $\int_{-\text{أ}}^{\text{أ}} \text{د(س)}\,\text{ء س} = ٢\int_{٠}^{\text{أ}} \text{د(س)}\,\text{ء س}$

باستخدام الخواص السابقة تحقق من صحة إجابتك فى حاول أن تحل ٣، ٤

### مثال التكامل المحدد للدوال الفردية والزوجية

⑤ أوجد:

أ $\int_{-٢}^{٢} \frac{\text{س}^{٣}-٣\text{س}}{\text{س}^{٢}+١}\,\text{ء(س)}$ ب $\int_{-٣}^{٣} (\text{س}^{٢}-١)\,\text{ء س}$

**الحل**

أ د دالة متصلة على ع

$\because \text{د(-س)} = \frac{(-\text{س})^{٣}-٣(-\text{س})}{(-\text{س})^{٢}+١} = -\frac{\text{س}^{٣}-٣\text{س}}{\text{س}^{٢}+١} = -\ \text{د(س)}$

$\therefore$ د دالة فردية ويكون: $\int_{-٢}^{٢} \frac{\text{س}^{٣}-٣\text{س}}{\text{س}^{٢}+١} = \text{صفر}$

## التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

⌘ ناقش مع طلابك ما ورد في نبد أن تحل وتوصل معهم إلى الأجابات الصحيحة

### إجابة حاول أن تحل

(٦) أ) $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ء}{ءس} \int_{١}^{س} ن\,هـ^{ن}\, ءن = س\,هـ^{س}$

ب) $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ء}{ءس} \int_{.}^{س} \frac{١}{١+ع^{٢}}\, ءع = \frac{١}{١+س^{٢}}$

جـ) $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ء}{ءس} \int_{٢}^{س^{٢}} (ن+٣)^{٥}\, ءس$

$= \frac{ء}{ءس^{٢}} \int_{٢}^{س^{٢}} (ن+٣)^{٥}\, ءس \times \frac{ءس^{٢}}{ءن}$

$= (س^{٢}+٣)^{٥} \times ٢\,س$

(٧) أ) $\frac{ء}{ءس} \int_{.}^{٢} لو_{هـ} [(س^{٢}+١)]\, ءس$

$= [\,لو_{هـ} (س^{٢}+١)\,]^{٢}_{.}$

$= لو_{هـ}\, ٥$

ب) $\frac{ء}{ءس} \int_{.}^{٢} لو_{هـ} (ن^{٢}+١)\, ءن = صفر$

جـ) $\frac{ء}{ءس} \int_{.}^{س} لو_{هـ} (ن^{٢}+١)\, ءن = لو_{هـ} (س^{٢}+١)$

(٨) $\frac{ء}{ءس} \int_{-١}^{س} د(ع)\, ءع = \frac{ء}{ءس} (٢س^{٣} - ٥س^{٢} + ك)$

$\therefore د(س) = ٦س^{٢} - ١٠س$

لايجاد قيمة ك نضع س = -١ في العلاقة المعطاة

$\therefore \int_{-١}^{-١} د(ع) = ع = ٢(-١)^{٣} - ٥(-١)^{٢} + ك$

$\therefore صفر = -٢ - ٥ + ك \longleftarrow ك = ٧$

### حلول تمارين (٤-٣)

(١) ب (٢) جـ (٣) جـ (٤) أ

(٥) $[\frac{١}{٤} س^{٤}]_{-١}^{٣} = \frac{٨١}{٤} - \frac{١}{٤} = ٢٠$ (٦) ٤

(٧) $\int_{.}^{٤} (٢س+١)^{\frac{٣}{٢}}\, ءس$

$= \frac{١}{٢} [(٢س+١)^{\frac{٥}{٢}} \times \frac{٢}{٥}]^{٤}_{.} = \frac{١}{٥} [(٢س+١)^{\frac{٥}{٢}}]^{٤}_{.}$

$= \frac{١}{٥} [٨١ - ١] = \frac{١}{٥} \times ٨٠ = ٢٠$

---

التكامل المحدد ٤ - ٣

ب) د دالة كثيرة الحدود متصلة على ع

$\because د(-س) = (-س)^{٢} - ١ = س^{٢} - ١ = د(س)$

$\therefore$ د دالة زوجية ويكون: $\int_{-٣}^{٣} (س^{٢}-١)\, ءس = ٢ \int_{.}^{٣} (س^{٢}-١)\, ءس$

$= ٢\,[\frac{١}{٣} س^{٣} - س]^{٣}_{.} = ٢ \times ٦ = ١٢$

**حاول أن تحل**

(٥) أوجد

أ) $\int_{-٣}^{٣} \frac{س}{١+س^{٢}}\, ءس$ ب) $\int_{-\pi}^{\pi} (٤ + \pi\, جتا ٢س)\, ءس$

**تفكير ناقد**

١ إذا كانت د دالة فردية متصلة على الفترة [-٣ ، ٥] ، $\int_{٣}^{٥} د(س)\, ءس = ٩$ ما قيمة $\int_{-٣}^{٥} د(س)\, ءس$ ؟

٢ إذا كانت د دالة زوجية متصلة على الفترة [-٤، ٤] ، $\int_{-٤}^{٤} د(س)\, ءس = ٢٠$

$\int_{.}^{٢} د(س)\, ءس = ٦$ ، ما قيمة $\int_{-٤}^{-٢} د(س)\, ءس$ ؟

**العلاقة بين التفاضل والتكامل**

**تمهيد:**

- إذا كانت الدالة د: د(ن) = ٣ن² - ٤ن + ٦ متصله على الفترة [١، ٥]

وكانت $ت(س) = \int_{١}^{س} د(ن)\, ءن$ حيث س ∈ [١، ٥] فإن:

$ت(س) = \int_{١}^{س} (٣ن^{٢} - ٤ن + ٦)\, ءن = [ن^{٣} - ٢ن^{٢} + ٦ن]^{س}_{١}$

$\therefore ت'(س) = \frac{ء}{ءس} (س^{٣} - ٢س^{٢} + ٦س - ٥) = ٣س^{٢} - ٤س + ٦ = د(س)$

أي أن: $ت'(س) = \frac{ء}{ءس} \int_{١}^{س} د(ن)\, ءن = د(س)$

- يمكن أن يعبر التكامل المحدد عن عدد حقيقي أو دالة في متغير كما يلي:

أ) التكامل المحدد كعدد حقيقي: $\int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس$ (ثابت، د دالة في المتغير س)

ب) التكامل المحدد كدالة في س: $\int_{أ}^{س} د(ن)\, ءن$ (ت دالة في المتغير س، ثابت، د دالة في المتغير ن)

**نظرية** إذا كانت الدالة د متصلة على الفترة [أ، ب] وكان $\int_{أ}^{س} د(ن)\, ءن$ مشتقة عكسية للدالة د على الفترة [أ، ب]، فإن:

$\frac{ء}{ءس} \int_{أ}^{س} د(ن)\, ءن = د(س)$ لكل س ∈ [أ، ب]

أي أن: مشتقة التكامل المحدد بالنسبة إلى الحد العلوى (س) تساوى الدالة المكاملة بعد استبدال متغيرها بالمتغير س

١١٩ كتاب الطالب - الصف الثالث الثانوى

---

التكامل المحدد وتطبيقاته

**مثال** العلاقة بين التفاضل والتكامل

(٦) باستخدام النظرية السابقة أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ لكل مما يأتى:

أ) $ص = \int_{١}^{س} \frac{ع}{لو_{هـ}(ع+١)}\, ءع$ ب) $ص = \int_{س}^{٤} ٢ن\, جا ن\, ءن$ جـ) $ص = \int_{١}^{س^{٢}} جتا\theta\, ء\theta$

**الحل**

أ) $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ء}{ءس} \int_{١}^{س} \frac{ع}{لو_{هـ}(ع+١)}\, ءع = \frac{س}{لو_{هـ}(س+١)}$

ب) $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ء}{ءس} \int_{س}^{٤} ٢ن\, جا ن\, ءن = \frac{ء}{ءس} [-\int_{٤}^{س} ٢ن\, جا ن\, ءن] = -٢س\, جا س$

جـ) $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ء}{ءس} \int_{١}^{س^{٢}} جتا\theta\, ء\theta$ بوضع $ع = س^{٢}$ $\therefore \frac{ءع}{ءس} = ٢س$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس} = \frac{ء}{ءع} \int_{١}^{ع} جتا\theta\, ء\theta \times \frac{ءع}{ءس}$

$= جتا ع\, \frac{ءع}{ءس} = ٢س\, جتا س^{٢}$

**حاول أن تحل**

(٦) أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ لكل مما يأتى:

أ) $ص = \int_{١}^{س} ن\,هـ^{ن}\, ءن$ ب) $ص = \int_{.}^{س} \frac{١}{١+ع^{٢}}\, ءع$ جـ) $ص = \int_{٢}^{س^{٢}} (ن+٣)^{٥}\, ءن$

**مثال** العلاقة بين التفاضل والتكامل

(٧) أوجد قيمة كل مما يأتى:

أ) $\frac{ء}{ءس} [\int_{.}^{\frac{\pi}{٣}} ع\, جا^{٥}ع\, ءع]$ ب) $\int_{.}^{١} \frac{ء}{ءس} (س^{٢} هـ^{\sqrt{س}})\, ءس$

**الحل**

أ) من الملاحظ أن قيمة التكامل المحدد $\int_{.}^{\frac{\pi}{٣}} ع\, جا^{٥}ع\, ءع$ تكون عددًا حقيقيًّا ثابتًا وليس دالة فى متغير.

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = [\int_{.}^{\frac{\pi}{٣}} ع\, جا^{٥}ع\, ءع] = صفر$

ب) من تعريف المشتقة العكسية: إذا كان ت'(س) = د(س) فإن:

$\int د(س)\, ءس = \int ت'(س)\, ءس = ت(س) + ث$

أى أن $\int \frac{ء}{ءس} [ت(س)]\, ءس = ت(س) + ث$

$\therefore \int_{.}^{١} \frac{ء}{ءس} [س^{٢} هـ^{\sqrt{س}}]\, ءس = [س^{٢} هـ^{\sqrt{س}}]^{١}_{.} = هـ$

تم إغفال إضافة الثابت ث لعدم تأثر التكامل المحدد به.

١٢٠ كتاب الرياضيات البحتة - التفاضل والتكامل

**١٥** $\int_{٠}^{٢} س^{٢}(س^{٣}+١)^{\frac{١}{٣}}\, ءس$

$\frac{١}{٣}\int_{٠}^{٢}(س^{٣}+١)^{\frac{١}{٣}} \times ٣س^{٢}\, ءس$

$= [\frac{١}{٣}(س^{٣}+١)^{\frac{٤}{٣}} \times \frac{٣}{٤}]_{٠}^{٢}$

$= [\frac{١}{٤}(س^{٣}+١)^{\frac{٤}{٣}}]_{٠}^{٢} = [٩^{\frac{٤}{٣}} - ١] \simeq ١٧{,}٧$

**١٥** $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} ظاع\, قا^{٢}ع\, ءع = \frac{١}{٢}[قا^{٢}ع]_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} = \frac{١}{٢}[٢] = ١$

**١٦** $\int_{٠}^{٣}(٦س - ٧هـ^{س})\, ءس$

$= [س^{٢} - ٧هـ^{س}]_{٠}^{٣} = (٩ - ٧هـ^{٣}) - (-٧هـ)$

$= ٩ - ٧هـ^{٣} + ٧ = ١٦ - ٧هـ^{٣}$

**١٧** أ $\int_{١}^{٥}[د(س) + ر(س)]\, ءس$

$\int_{١}^{٥} د(س)\, ءس + \int_{١}^{٥} ر(س)\, ءس = ١٠ - ٢ = ٨$

جـ $\int_{٥}^{١} ٣س(س)\, ءس = -\int_{١}^{٥} ٣س(س)\, ءس$

$= -٣ \times -٢ = ٦$

**١٨** أ $\int_{٠}^{٤} د(س)\, ءس + \int_{٠}^{٤} ٢\, ءس = ٣ + [٢س]_{٠}^{٤} = ١١$

ب $\int_{-٤}^{٤} د(س)\, ءس = صفر$

جـ $\int_{٢}^{٤} د(س)\, ءس = ٢ \times ٣ = ٦$

**١٩** $\int_{٠}^{٦} د(س)\, ءس = \int_{٠}^{٢} ٢\, ءس + \int^{٦} س\, ءس$

$= [٢س]_{٠}^{٢} + [\frac{١}{٢}س^{٢}]_{٢}^{٦} = ٤ + (١٨ - ٢) = ٢٠$

**٢٠** $\therefore \frac{ء}{ءس}\int_{١}^{س} د(ع)\, ءع = د(س)$

$\therefore د(س) = \frac{ء}{ءس}(٤س^{٣} - ٣س + حـ) = ١٢س - ٣$

لايجاد قيمة حـ نضع س = ١ ان العلامة

**٢١** $\int_{١}^{س} د(ع^{٢} - ٣ع + ٢)\, ءع = س^{٢} - ٣س + ٢$

**٢٣** $\frac{ء}{ءس}\int_{٢}^{س^{٢}}(ع+٢)^{٣}\, ءع = \frac{ءص}{ءس}$ بوضع $س^{٢} = ن$

$\therefore ٢س = \frac{ءن}{ءس}$ $\qquad \frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءن} \times \frac{ءن}{ءس}$

$= \frac{ء}{ءس}\int_{١}^{ن}(ع+١)^{٣}\, ءع \times \frac{ءن}{ءس}$

$= (ن+١)^{٣} \times ٢س = (س^{٢}+١)^{٣} \times ٢س$

**٢٥** $\int_{س}^{٢} هـ^{ع} جاع\, ءع = -\int_{٢}^{س} هـ^{ع} جاع\, ءع$

$\frac{ء}{ءس}\int_{٢}^{س} -هـ^{ع} جاع\, ءع = -هـ^{س} جاس$

**٣٣** $\frac{ء}{ءس}\int_{١}^{٣}(لوس)^{٧}\, ءس = صفر$

**٢٧** $٣\,(س^{٢}+٥)^{٣} = (٢٧+٥) - ٥ = ٢٧$

التكامل المحدد ٤ - ٣

حاول أن تحل

٧ أوجد ناتج كل مما يأتى:

أ $\int_{٠}^{٢}\frac{ء}{ءس}[لو_{هـ}(س^{٢}+١)]\, ءس$ ب $\frac{ء}{ءس}\int_{٠}^{٢} لو_{هـ}(ن^{٢}+١)\, ءن$

جـ $\frac{ء}{ءس}\int_{٠}^{س} لو_{هـ}(ن^{٢}+١)\, ءن$

مثال

٨ إذا كان $\int_{٢}^{س} د(ن)\, ءن = س^{٤} - ٣س^{٢} + ك$ حيث $ك \in ع$ أوجد د(س)، قيمة الثابت ك

الحل

من النظرية السابقة $\frac{ء}{ءس}\int_{٢}^{س} د(ن)\, ءن = د(س)$

$\therefore د(س) = \frac{ء}{ءس}(س^{٤} - ٣س^{٢} + ك) = ٤س^{٣} - ٦س$

لإيجاد قيمة ك نضع س = ٢ فى العلاقة المعطاة. $\therefore \int_{٢}^{٢} د(ن)\, ءن = ت(٢) = صفر$

أى أن $(٢)^{٤} - ٣(٢)^{٢} + ك = ٠$ $\therefore ك = ١٢ - ١٦ = -٤$

حاول أن تحل

إذا كان $\int_{-١}^{س} د(ع)\, ءع = ٢س^{٣} - ٥س^{٢} + ك$ حيث ك ثابت أوجد د(س)، قيمة الثابت ك.

تمـــارين ٤ – ٣

**اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة**

١ إذا كانت $ت(س) = س^{٢} + ١$ مشتقة عكسية للدالة د فإن $\int_{-١}^{٠} د(س)\, ءس$ يساوى:

أ -٢ ب -١ جـ صفر د $\frac{٤}{٣}$

٢ إذا كان $\int_{-٢}^{٣} د(س)\, ءس = ١٢$، $\int_{-٢}^{٥} د(س)\, ءس = ١٦$ فإن $\int_{٣}^{٥} د(س)\, ءس$ يساوى:

أ -٢٨ ب -٤ جـ ٤ د ٢٨

٣ إذا كانت $د(س) = |س|$، فإن $\int_{-٢}^{٢} د(س)\, ءس$ يساوى:

أ -١ ب صفر جـ ٢ د ٤

٤ إذا كان $\int_{-٢}^{س} د(ع)\, ءع = ٢س^{٣} - ٦س^{٢} + ٥$ فإن د(١) يساوى

أ -٦ ب -١ جـ $\frac{٧}{٢}$ د ١

١٢١ كتاب الطالب – الصف الثالث الثانوى

التكامل المحدد وتطبيقاته

**أوجد قيمة كل مما يأتى:**

٥ $\int_{-١}^{٣} س^{٣}\, ءس$ ٦ $\int_{١}^{٣}(٣س^{٢} - ٢)\, ءس$ ٧ $\int_{٠}^{٤}(٢س+١)^{\frac{٣}{٢}}\, ءس$

٨ $\int_{٤}^{٨}\frac{ءن}{\sqrt{٨ - ن}}$ ٩ $\int_{٠}^{٢} س(س^{٢} - ٣)^{٢}\, ءس$ ١٠ $\int_{٠}^{٢} س^{٢}\sqrt[٣]{س^{٣}+١}\, ءس$

١١ $\int_{-١}^{٣}|س - ١|\, ءس$ ١٢ $\int_{-٤}^{٠} س(س+٤)^{٣}$ ١٣ $\int_{١٠}^{٣} س\sqrt{س+١}\, ءس$

١٤ $\int_{٠}^{١} ٢جا\pi ع\, ءع$ ١٥ $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} ظاع\, قا^{٢}ع\, ءع$ ١٦ $\int_{٠}^{٣}(٢س - ٧هـ^{س})\, ءس$

**أجب عن ما يأتى:**

١٧ إذا كان $\int_{١}^{٥} د(س)\, ءس = ١٠$، $\int_{١}^{٥} ر(س)\, ءس = -٢$ احسب قيمة

أ $\int_{١}^{٥}[د(س) + ر(س)]\, ءس$ ب $\int_{١}^{٥}[د(س) - ر(س)]\, ءس$ جـ $\int_{٥}^{١} ٣ر(س)\, ءس$

١٨ إذا كان د دالة متصلة على الفترة [-٤ ، ٤]، $\int_{٠}^{٤} د(س)\, ءس = ٣$ ، احسب قيمة

أ $\int_{٠}^{٤}[د(س) + ٢]\, ءس$ ب $\int_{-٤}^{٤} د(س)\, ءس$ ، د فردية جـ $\int_{-٤}^{٤} د(س)\, ءس$، د زوجية

١٩ إذا كانت $د(س) = \begin{cases} ٢ & \text{عندما } س < ٢ \\ س & \text{عندما } س \geqslant ٢ \end{cases}$ أوجد $\int_{٠}^{٦} د(س)\, ءس$

٢٠ إذا علم أن $\int_{١}^{س} د(ع)\, ءع = ٤س^{٣} - ٣س + جـ$ أوجد د(س) وقيمة الثابت جـ

أوجد مشتقة كل مما يأتى بالنسبة إلى س

٢١ $\int_{٠}^{س}(ع^{٢} - ٣ع + ٢)\, ءع$ ٢٢ $\int_{٢}^{س}\frac{ن}{٤ - ن}\, ءن$ ٢٣ $\int_{٢}^{س^{٢}}(ع+١)^{٣}\, ءع$

٢٤ $\int_{٠}^{س^{٣}} جتا^{٢}\theta\, ء\theta$ ٢٥ $\int_{س}^{٢} هـ^{ع} جاع\, ءع$ ٢٦ $\int_{١}^{٣}(لوس)^{٧}\, ءس$

**احسب قيمة**

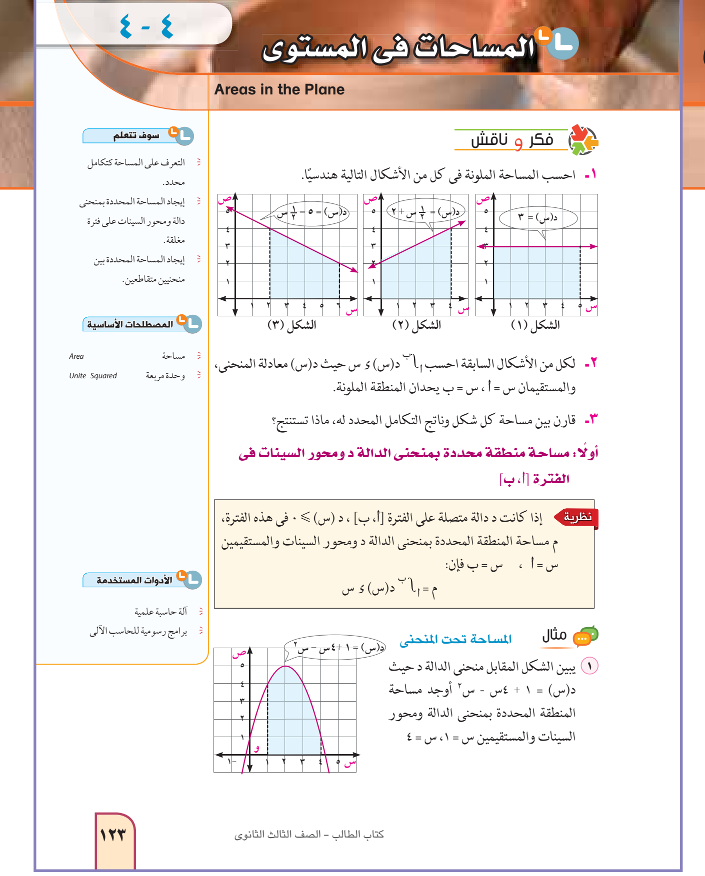
٢٧ $\int_{٠}^{٣}\frac{ء}{ءس}(٣س^{٢}+٥)\, ءس$ ٢٨ $\int_{-٣}^{٣}\frac{ء}{ءس}(هـ^{س^{٢}})\, ءس$ ٢٩ $\int_{١}^{هـ}\frac{ء}{ءس}(س^{٢} لو_{هـ}س)\, ءس$

١٢٢ كتاب الرياضيات البحتة – التفاضل والتكامل

# ٤ - ٤

# المساحات فى المستوي

## Areas in the plane



٤ - ٤ المساحات فى المستوى

Areas in the Plane

فكر و ناقش

١- احسب المساحة الملونة فى كل من الأشكال التالية هندسيًا.



٢- لكل من الأشكال السابقة احسب $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ء س حيث د(س) معادلة المنحنى، والمستقيمان س = أ ، س = ب يحدان المنطقة الملونة.

٣- قارن بين مساحة كل شكل ونواتج التكامل المحدد له، ماذا تستنتج؟

**أولًا: مساحة منطقة محددة بمنحنى الدالة د ومحور السينات فى الفترة [أ ، ب]**

**نظرية** إذا كانت د دالة متصلة على الفترة [أ ، ب] ، د(س) ≥ ٠ فى هذه الفترة، م مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب فإن:

$م = \int_{أ}^{ب} د(س)\, ء س$

**مثال** المساحة تحت المنحنى

١) يبين الشكل المقابل منحنى الدالة د حيث د(س) = ١ + ٤س - س^٢ أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة ومحور السينات والمستقيمين س = ١ ، س = ٤



سوف تتعلم

- التعرف على المساحة كتكامل محدد.
- إيجاد المساحة المحددة بمنحنى دالة ومحور السينات على فترة مغلقة.
- إيجاد المساحة المحددة بين منحنيين متقاطعين.

المصطلحات الأساسية

- مساحة Area
- وحدة مربعة Unite Squared

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسب الآلي

١٢٣ كتاب الطالب - الصف الثالث الثانوى

### خلفية:

مكاملة الدالة هو نوع من التعميم لكميات قابلة للتجزئة مثل المساحة أو الحجم أو الكتلة أو أى مجموع لعناصر متناهية في الصغر، ويستخدم التكامل المحدود لدالة متصلة من س = أ إلى س = ب وأسفل منحنى الدالة لإيجاد مساحة تلك المنطقة وذلك باستخدام العلاقة: $م = \int_{أ}^{ب} د(س)\, ء س$.

### مخرجات التعلم

**في نهاية هذا الدرس وتنفيذ الأنشطة فيه من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:**

- يتعرف على المساحة أسفل منحنى الدالة على أنها تكامل محدد.
- يوجد المساحة المحدودة بمنحنى دالة ومحور السينات على فترة مغلقة.
- يوجد المساحة المحدودة بين منحنين متقاطعين.

### مفردات أساسية

مساحة - وحدة مربعة.

### المواد التعليمية المستخدمة

السبورة التعليمية - طباشير ملون - آلة حاسبة علمية- برامج رسومية للحاسوب.

### مكان التدريس

الفصل الدراسي

### مصادر التعلم

كتاب الطالب من ص (١٣١) إلى ص (١٣٩).

### تهيئة

- ناقش مع طلابك إيجاد المساحة اسفل الخطوط المستقيمة الموحدة في صفحة (١٣١) والمحدودة بالمستقيمات المبينة بالشكل من خلال إيجاد مساحة المستطيل أو شبه المنحرف لدوال خطية
- أوجد هذه المساحات باستخدام $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ء س حيث د(س) معادلة المنحنى والمستقيمان س = أ ، س = ب يحددان المنطقة الملونه ، ثم قارن بين هذه المساحات في الحالتين السابقتين .
- عمم ما توصلت إليه كما ورد في النظرية الموضحة في ص (١٣١) وذلك لإيجاد المساحة تحت المنحنى.

## فى بند تفكير ناقد ص (١٢٤)

¤ يهدف فى هذا التفكير على أنه إذا كانت إشارة الدالة د حيث د(س) < ٠ على فترة محدودة [جـ ، ب]
فإن م = |$\int_{جـ}^{ب}$ د(س) ء س|

### إجابات

[أ ، ب] المنحنى أعلى محور السينات

[جـ ، ب] المنحنى أسفل محور السينات

## التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

¤ ناقش مع طلابك ما ورد في بند حاول أن تحل وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة

### حلول

#### حاول أن تحل ١

د(س) = ٣س$^{٢}$ +١ > صفر لكل س ∈ [-١ ، ٢]

∴ م = $\int_{-١}^{٢}$ (٣س$^{٢}$ +١) ء س = [س$^{٣}$+س]$_{-١}^{٢}$

م = (٨ + ٢) - (-١ - ١) = ١٢ وحدة مربعة

#### حاول أن تحل ٢

د(س) = $\frac{٤س}{س^{٢}+١}$ د(س) = ٠

اشارة د(س) تتوقف على إشارة البسط

د(س) > صفر فى الفترة ]٠ ، ∞[

د(س) < صفر فى الفترة ]- ∞ ، ٠[

م = $\int_{٠}^{٤} \frac{٤س}{س^{٢}+١}$ ء س = ٢ $\int_{٠}^{٤} \frac{٢س ء س}{س^{٢}+١}$

= ٢ [ لو$_{هـ}$ (س$^{٢}$+١)]$_{٠}^{٤}$ = ٢ لو$_{هـ}$ ٥ - ١ وحده

التكامل المحدد وتطبيقاته

الحل

د متصلة على الفترة [١، ٤] ، د(س) > ٠ لكل س ∈ [١، ٤]

∴م = $\int_{١}^{٤}$ د(س) ء س = $\int_{١}^{٤}$ (١ + ٤س - س$^{٢}$) ء س

= [س + ٢س$^{٢}$ - $\frac{١}{٣}$ س$^{٣}$]$_{١}^{٤}$ = [٤ + ٣٢ - $\frac{٦٤}{٣}$] - [١ + ٢ - $\frac{١}{٣}$]

= ٣٦ - $\frac{٦٤}{٣}$ - ٣ + $\frac{١}{٣}$ = ١٢ وحدة مربعة

حاول أن تحل

(١) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د ومحور السينات والمستقيمين س = -١، س = ٢ حيث د(س) = ٣س$^{٢}$ + ١

تفكير ناقد

إذا قطع منحنى الدالة د محور السينات عند س = جـ حيث جـ ∈ [أ، ب] بين كيف يمكن حساب مساحة منطقة فوق محور لسينات ومحددة بمنحنى الدالة د، وأحد المستقيمين س = أ ، س = ب (المنطقة م$_{١}$)

لاحظ أن:

- لإيجاد المساحة يفضل إيجاد أصفار الدالة حتى لو أعطيت حدود التكامل والتى تجزئ مجال الدالة [أ، ب] إن وجدت إلى فترات جزئية.
- دراسة إشارة الدالة على الفترات الجزئية إن وجدت فإذا كانت:
  - موجبة أى د(س) > ٠ على الفترة [أ، جـ] فإن م$_{١}$ = $\int_{أ}^{جـ}$ د(س) ء س
  - سالبة أى د(س) < ٠ على الفترة [جـ، ب] فإن م$_{٢}$ = |$\int_{جـ}^{ب}$ د(س) ء س|

مثال: المساحة فوق محور السينات ومنحنى دالة

(٢) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة د: د(س) = $\sqrt[٣]{٢س + ٢}$ والمستقيم س = ٣ وفوق محور السينات.

الحل

نوجد أصفار الدالة بوضع د(س) = ٠

∴ $\sqrt[٣]{٢س + ٢}$ = ٠ أى أن: س = -١

∴المساحة المطلوبة م = $\int_{-١}^{٣}$ د(س) ءس

= $\int_{-١}^{٣}$ (٢س + ٢)$^{\frac{١}{٣}}$ ءس = [ $\frac{٣}{٤ \times ٢}$ (٢س + ٢)$^{\frac{٤}{٣}}$ ]$_{-١}^{٣}$

= $\frac{٣}{٨}$ [ ٨$^{\frac{٤}{٣}}$ - ٠ ] = $\frac{٣}{٨}$ (٢$^{٣}$)$^{\frac{٤}{٣}}$ = ٦ وحدات مربعة

١٢٤ كتاب الرياضيات البحتة - التفاضل والتكامل

المساحات فى المستوى ٤ - ٤

حاول أن تحل

(٢) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د: د(س) = $\frac{٤س}{س^{٢} + ١}$ والمستقيم س = ٤ وتقع فوق محور السينات.

مثال: المساحة بين منحنى ومحور السينات

(٣) إذا كانت د: ]-∞، ٣] ← ع حيث د(س) = س$^{٣}$ - ٤س أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة ومحور السينات وتقع أعلى محور السينات.

الحل

نوجد نقط تقاطع منحنى الدالة مع محور السينات (أصفار الدالة)

د(س) = س$^{٣}$ - ٤س = س(س$^{٢}$ - ٤) = س (س - ٢) (س + ٢)

عندما د(س) = ٠ ∴س = ٠ أو س = ٢ أو س = -٢

بدراسة إشارة الدالة د نجد

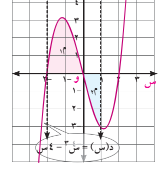
د(س) ≥ ٠ على الفترة [-٢، ٠] وعلى الفترة [٢، ٣]

∴المساحة م = م$_{١}$ + م$_{٢}$ = $\int_{-٢}^{٠}$ (س$^{٣}$ + ٤س) ءس + $\int_{٢}^{٣}$ (س٣ - ٤س) ءس

= $\frac{١}{٤}$ س$^{٤}$ - ٢س٢]$_{-٢}^{٠}$ + [$\frac{١}{٤}$ س$^{٤}$ - ٢س$^{٢}$]$_{٢}^{٣}$

= (٠ - (-٤)) +($\frac{٨١}{٤}$ - ١٨ - (-٤))

= $\frac{١٢١}{٤}$ وحدة مربعة




ملاحظة هامة

لتعيين المساحة بين منحنى الدالة ومحور السينات والمستقيمين س = -٢ ، س = ١ كما فى الرسم المقابل.

نجد أن:

د(س) ≥ ٠ عندما س ∈ [-٢، ٠ ]، د(س) ≤ ٠ عندما س ∈ [٠، ١]

∴ المساحة م = م$_{١}$ + م$_{٢}$

= $\int_{-٢}^{٠}$ (س$^{٣}$ - ٤س) ءس + | $\int_{٠}^{١}$ (س$^{٣}$ - ٤س) ءس |

= [ $\frac{١}{٤}$ س$^{٤}$ - ٢س$^{٢}$]$_{-٢}^{٠}$ + |$\frac{١}{٤}$ س$^{٤}$ - ٢س$^{٢}$]$_{٠}^{١}$|

= ٤ + |($\frac{١}{٤}$ - ٢) - ٠ | = ٤ + |- $\frac{٧}{٤}$| = $\frac{٢٣}{٤}$ وحدة مربعة.

١٢٥ كتاب الطالب - الصف الثالث الثانوى

## التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

### حلول

#### حاول أن تحل (٣)

ص = ٣ + ٢س - س$^{٢}$ = صفر

(٣ - س) (١١ + س)

س = ٣ ، س = ١

س ـــ ١ ـــ ٣ ــــ
-------- +++++++ --------

$م = \int_{١-}^{٣} (٣ + ٢س - س^{٢})\, ء\, س$

$[٣س + س^{٢} - \frac{١}{٣} س^{٣}]_{١-}^{٣}$

$= (٩ + ٩ - ٩) - (-٣ + ١ + \frac{١}{٣})$

$٩ - (-\frac{٥}{٣}) = \frac{٣٢}{٣}$

#### حاول أن تحل (٤)

$د(س) = ١٢ - \frac{١}{٣} س^{٢} \geqslant$ صفر في [-٦ ، ٦]

$م = \int_{٠}^{٣} (١٢ - \frac{١}{٣} س^{٢})\, ء\, س = [١٢ س - \frac{١}{٩} س^{٣}]_{٠}^{٦}$

$= (٧٢- \frac{١}{٩} \times ٢١٦) - (\text{صفر}) = ٤٨$ وحده مربعة

**تكلفة تغطية الممرات الخمسة**

= ٥ × ٤٨ × ٤٠٠٠ = ٩٦٠٠٠ جنية

## ارشادات للدراسة

- لإيجاد المساحة لمنطقة مستوية محصورة بين منحنيين وباعتبار أن د ، ر دالتين متصلتين ، نوجد نقاط تقاطع تلك الدالتين ولتكن [أ ، ب] ثم يبعث إشارة كل منهما لتحدد المساحة بينهما وطالما أن المساحة < صفر تتكون المساحة المطلوبة هي م = |م١ - م٢|.

## التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

- ناقش مع طلابك ما ورد في بند حاول أن تحل وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة

### حلول

#### حاول أن تحل ٦

توجد نقط مقاطع المنحنيين

$س^{٢} - ٢ = ٣ - (س^{٢} + ٢س + ١)$

$٢ س^{٢} + ٢س - ٤ = \text{صفر}$

س = ١ ، س = -٢

$م = \int_{٢-}^{١} (ص_{١} - ص_{٢})\, ء\, س$

---



**حاول أن تحل**

٣ أوجد مساحة المنطقة المستوية المحددة بالمنحنى ص = ٣ + ٢س - س$^{٢}$ ومحور السينات.

**تفكير ناقد**

أوجد مساحة المنطقة المستوية المحددة بالمنحنى ص = ٣ + ٢س - س$^{٢}$ والمستقيمات س = -١، س = ٤ ، ص = ٠

**مثال** تطبيقات معمارية للمساحة

٤ صمم مهندس مدخل فندق على شكل قوس معادلته ص = $-\frac{١}{٢}$ (س - ١) (س - ٧) حيث س بالأمتار فإذا غُطى هذا المدخل بزجاج تكلفة المتر المربع الواحد منه ١٥٠٠ جنيه كم تكون تكلفة الزجاج؟

**الحل**

**نمذجة المسألة:**

تكاليف زجاج مدخل الفندق = مساحة الزجاج بالأمتار المربعة × تكلفة المتر المربع الواحد

بفرض أن التكاليف الكلية ك جنيهًا ، مساحة الزجاج م متر مربع

∴ ك = ١٥٠٠ م (١)

**إيجاد مساحة الزجاج:**

باعتبار المستوى الأفقي محورًا للسينات معادلته ص = ٠ ومعادلة قوس مدخل الفندق ص = د(س) حيث:

$د(س) = -\frac{١}{٢} (س - ١) (س - ٧)$

∴ عند د(س) = ٠ فإن: س = ١ أو س = ٧

فتكون د(س) ⩾ ٠ لكل س ∈ [١، ٧]

$المساحة\ م = \int_{١}^{٧} -\frac{١}{٢} (س - ١) (س - ٧)\, ء\, س = \int_{١}^{٧} (-\frac{١}{٢} س^{٢} + ٤س - \frac{٧}{٢})\, ء\, س$

$= [-\frac{١}{٦} س^{٣} + ٢س^{٢} - \frac{٧}{٢} س]_{١}^{٧} = \frac{٤٩}{٣} - (-\frac{٥}{٣}) = ١٨$ (٢)

من (١) ، (٢)

∴ ك = ١٥٠٠ × ١٨ = ٢٧٠٠٠

**أي أن:** تكلفة تغطية مدخل الفندق بالزجاج تساوى ٢٧٠٠٠ جنيه

**حاول أن تحل**

٤ إذا كانت تكلفة تغطية المتر المربع الواحد من أرضية ممرات الفندق بالجرانيت ٤٠٠ جنيه وتم تغطية ٥ممرات متطابقة بالجرانيت مساحة كل منها محدودة بمنحنى الدالة د، والمستقيمين س = ٠ ، ص = ٠ حيث د(س) = ١٢ - $\frac{١}{٣}$ س$^{٢}$. **أوجد تكلفة تغطية الممرات الخمسة.**





**ثانيًا: مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين منحنيين**

**تعريف:** إذا كانت د، ر دالتين متصلتين على الفترة [أ، ب]، وكان د(س) ⩾ ر(س) لكل س ∈ [أ، ب]، فإن مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين ص = د(س) ، ص = ر(س) والمستقمين س = أ ، س = ب تعطى بالعلاقة

$م = \int_{أ}^{ب} [د(س) - ر(س)]\, ء\, س$

**فى الشكل المقابل لاحظ أن:**

د، ر متصلتان على الفترة [أ، ب]

د(س) > ر(س) لكل س ∈ [أ، ب]

إذا كانت المساحة بين منحنى د(س) ومحور السينات = م$_{١}$

والمساحة بين منحنى ر(س) ومحور السينات = م$_{٢}$

فإن المساحة م بين منحنى د(س) ، ر(س) = م$_{١}$ - م$_{٢}$

**أى أن:** $م = \int_{أ}^{ب} د(س)\, ء\, س - \int_{أ}^{ب} ر(س)\, ء\, س = \int_{أ}^{ب} [د(س) - ر(س)]\, ء\, س$

**ملاحظة هامة :** عندما تنحصر منطقة بين منحنيات متقاطعة، فإن حدود التكامل بالنسبة إلى س هى الإحداثيات السينية لنقط التقاطع.

**مثال** مساحة منطقة بين منحنيين متقاطعين

٥ أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى ص$_{١}$ = $\sqrt{س}$ ، والمستقيم ص$_{٢}$ = س - ٢ ومحور الصادات

**الحل**

لإيجاد الإحداثيات السينية لنقط التقاطع نضع ص$_{١}$ = ص$_{٢}$

س - ٢ = $\sqrt{س}$ بتربيع الطرفين

س$^{٢}$ - ٤س + ٤ = س أى: س$^{٢}$ - ٥س + ٤ = ٠

(س - ١) (س - ٤) = ٠ ∴ س = ١ أو س = ٤

عند س = ١ ص$_{١}$ = $\sqrt{١}$ = ١، ص$_{٢}$ = ١ - ٢ = -١

**أى أن** ص$_{١}$ ≠ ص$_{٢}$

∴ عند س = ١ لاتوجد نقط تقاطع للمنحنيين

عند س = ٤ ص$_{١}$ = $\sqrt{٤}$ = ٢، ص$_{٢}$ = ٤ - ٢ = ٢ ∴ ص$_{١}$ = ص$_{٢}$

∴ حدا التكامل هما س = ٤ ، س = ٠ (محور الصادات) ومنحنيًا ص$_{١}$ ، ص$_{٢}$ متصلان على الفترة [٠، ٤]

نأخذ قيمة إختيارية تنتمى إلى الفترة ]٠، ٤[ ولتكن س = ٢

عند س = ٢ ص$_{١}$ = $\sqrt{٢}$ ، ص$_{٢}$ = ٢ - ٢ = ٠

$م = \int_{-٢}^{١} (٣- (س - ١)^٢ - (س^٢ - ٢))\, ء س$

$= [-٢س^٢ - ٢س + ٤)\, ء س$

$= [\frac{-٢}{٣} س^٣ - س^٢ + ٤س]_{-٢}^{١}$

$= (\frac{-٢}{٣} - ٢ + ٤) - (\frac{١٦}{٣} - ٤ - ٨)$

$= \frac{٧}{٣} + \frac{٢٠}{٣} = \frac{٢٧}{٣} = ٩$ وحدات مربعة

## حاول أن تحل ٧

بحل المعادلتين معًا $٢س^٢ = س^٤ - ٢ س^٢$

$س^٤ - ٤ س^٢ = ٠$ $س^٢ (س^٢ - ٤) = ٠$

س = صفر، س = ٢، س = -٢

$م = ٢ \int_{صفر}^{٢} (٢س^٢ - ٤س^٤ + ٢س^٢)\, ء س$ لأنها زوجية

$= ٢ [١٦] = ٣٢$ وحدة مربعة

المسافة اللازمة = $١٠٠٠ \times ٣٢ = ٣٢٠٠٠$

## تمارين (٤ - ٤)

(١) $\int_{٠}^{٣} (\frac{١}{٢} س + ١)\, ء س = [\frac{١}{٤} س^٢ + س]_{٠}^{٣}$

$= \frac{١}{٤} + ٣ = \frac{٢١}{٨}$

(٢) $\int_{-١}^{٠} س^٢ ء س + \int_{٠}^{٢} س^٢ ء س = \int_{-١}^{٢} س^٢ ء س$

$= [\frac{١}{٣} س^٣]_{-١}^{٢} = \frac{٨}{٣} + \frac{١}{٣} = ٣$ وحدات مربعة

(٣) $\int_{١}^{٣} \frac{٢}{س}\, ء س = [لو_{هـ} س^٢]_{١}^{٣}$

$= ٢ لو_{هـ} ٣ - ٢ لو_{هـ} ١$ وحدة مربعة

(٤) $\int_{٢}^{٤} س = س = [\frac{١}{٢} س^٢]_{٢}^{٤}$

$= (\frac{١}{٢} \times ١٦) - (\frac{١}{٢} \times ٤) = ٦$ وحدات مربعة

(٥) $م = \int_{-٢}^{١} (٤ - س^٢ - س - ٢)\, ء س$

$= ١ - ٢ [- \frac{١}{٣} س^٣ - \frac{١}{٢} س^٢ + ٢س]_{-٢}^{١}$

$= (\frac{٧}{٦}) - (- \frac{١٠}{٣}) = \frac{٩}{٢}$ وحدة مربعة

(٦) $م = \int_{-٢}^{٢} (٤ - س^٢ - (٢ - \frac{١}{٢} س^٢))\, ء س$

**أكمل الحل بنفسك**

## أسئلة الاختيار

(٧) حـ (٨) ء (٩) جـ (١٠) ب

(١١) $م = \int_{-٢}^{١} (٥ - س^٢)\, ء س = [٥ س - \frac{١}{٣} س^٣]_{-٢}^{١}$

$= (٥ - \frac{١}{٣}) - (-١٠ + \frac{٨}{٣}) = ١٨$ وحدة مربعة



أى أن $ص_١ \leqslant ص_٢$ لكل س ∈ [٠ ، ٤]

∴ مساحة المنطقة = $\int_{٠}^{٤} (ص_٢ - ص_١)\, ء س = \int_{٠}^{٤} (\sqrt{س} - س + ٢)\, ء س$

$= [\frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} - \frac{١}{٢} س^٢ + ٢س]_{٠}^{٤} = \frac{٢}{٣} (٢^٢)^{\frac{٣}{٢}} - \frac{١}{٢} (١٦) + ٢ (٤) = \frac{١٦}{٣} - ٨ + ٨ = \frac{١٦}{٣}$ وحدة مربعة

حاول أن تحل

(٥) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالتين د، ر حيث:

$د(س) = س^٢ - ٢$ ، $ر(س) = ٣ - (س + ١)^٢$

**مثال** تعدد المناطق بين منحنيين متقاطعين

(٦) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د ومنحنى الدالة ر حيث

$د(س) = س^٣ - ٣س^٢ + ٥$ ، $ر(س) = س + ٢$

الحل:

لإيجاد الإحداثيات السينية لنقط التقاطع:

نضع د(س) = ر(س)

$س^٣ - ٣س^٢ + ٥ = س + ٢$

$س^٣ - ٣س^٢ - س + ٣ = ٠$

$(س^٣ - ٣س^٢) - (س - ٣) = ٠$

$س^٢ (س - ٣) - (س - ٣) = ٠$

$(س - ٣)(س - ١)(س + ١) = ٠$

∴ س = ٣ أو س = ١ أو س = -١

يكون التكامل على الفترتين [-١، ١] ، [١، ٣] لإيجاد المساحة المطلوبة وهى عبارة عن مساحتين أى:

$م = م_١ + م_٢$

$م = |\int_{-١}^{١} [د(س) - ر(س)]\, ء س| + |\int_{١}^{٣} [د(س) - ر(س)]\, ء س|$

$= |\int_{-١}^{١} (س^٣ - ٣س^٢ + ٥ - س - ٢)\, ء س| + |\int_{١}^{٣} (س^٣ - ٣س^٢ - س + ٣)\, ء س|$

$= |[\frac{١}{٤}س^٤ - س^٣ - \frac{١}{٢}س^٢ + ٣س]_{-١}^{١}| + |[\frac{١}{٤}س^٤ - س^٣ - \frac{١}{٢}س^٢ + ٣س]_{١}^{٣}|$

$= |-٢ + ٦| + |٢٦ - ٣٠| = ٤ + ٤ = ٨$ وحدات مربعة

حاول أن تحل

(٦) تقوم شركة إعلانات بإنتاج ملصق لتسويق سلعة ما فإذا كان الملصق على شكل منطقة محددة بمنحنى الدالتين د، ر حيث $د(س) = ٢س^٢$ ، $ر(س) = س^٤ - ٢س^٢$، س مقدرة بالديسيمتر. احسب المساحة اللازمة من الورق اللاصق لإنتاج ١٠٠٠ ملصق لهذه السلعة.

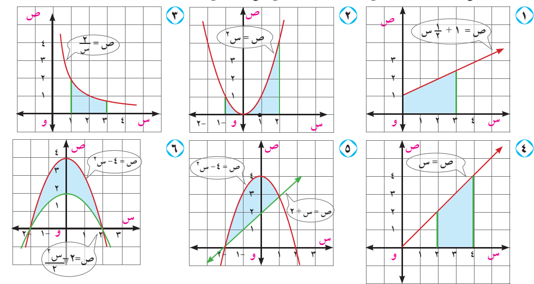
باستخدام برنامج رسومى ارسم هذا الملصق وابحث أبسط الطرق لإيجاد مساحته.





## تمارين ٤ - ٤

اكتب التكامل المحدد الذى يعطى المساحة الملونة فى كل مما يأتى واحسب قيمته.

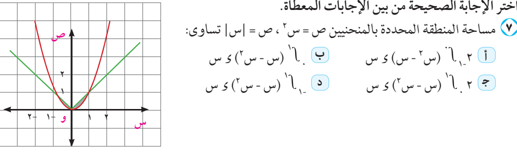



اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة.

(٧) مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين $ص = س^٢$ ، $ص = |س|$ تساوى:

أ $٢ \int_{٠}^{١} (س^٢ - س)\, ء س$ ب $\int_{-١}^{٠} (س - س^٢)\, ء س$

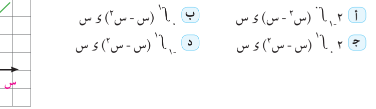
جـ $٢ \int_{٠}^{١} (س - س^٢)\, ء س$ د $\int_{-١}^{١} (س - س^٢)\, ء س$



(٨) مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى $ص = س^٣$ والمستقيم ص = س ، تساوى:

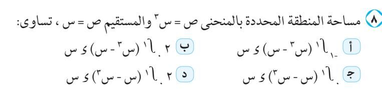
أ $\int_{-١}^{١} (س^٣ - س)\, ء س$ ب $٢ \int_{-١}^{٠} (س^٣ - س)\, ء س$

جـ $\int_{٠}^{١} (س - س^٣)\, ء س$ د $٢ \int_{٠}^{١} (س - س^٣)\, ء س$



(٩) مساحة المنطقة المحددة بالمستقيمات ص = س، س = ٢ ، ص = ٠ ؛ تساوى:

أ $\frac{١}{٢}$ ب ١ جـ ٢ د ٤



(١٠) مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى $ص = س^٣$ والمستقيمات ص = ٠، س = ٢ تساوى

أ ٨ ب ٤ جـ ٢ د ١

في كل مما يأتي إحسب مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين:

(١١) المنحنى $\text{ص} = ٥ - \text{س}^{٢}$ ومحور السينات والمستقيمين $\text{س} = -٢$ ، $\text{س} = ١$

(١٢) المستقيمات: $\text{س} + ٢\text{ص} = ٩$ ، $\text{س} = ١$ ، $\text{س} = ٣$ ، $\text{ص} = ٠$

(١٣) المنحنى $\text{ص} = \sqrt{\text{س} + ٤}$ والمستقيمين $\text{س} = ٥$ ، $\text{ص} = ٠$

(١٤) المنحنى $\text{ص} = ٣ - ٢\text{س} - \text{س}^{٢}$ ومحور السينات

(١٥) المنحنى $\text{ص} = \frac{٤}{\text{س}^{٢}}$ والمستقيمات $\text{س} = ١$ ، $\text{س} = ٤$ ، $\text{ص} = ٠$

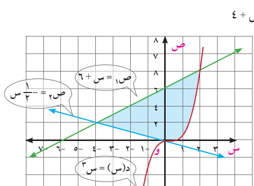
(١٦) منحنى الدالة د: $\text{د(س)} = (٣ - \text{س})(\text{س} - ١)^{٢}$ ومحوري الاحداثيات حيث $\text{د(س)} \geqslant ٠$

(١٧) منحنى الدالة د: $\text{د(س)} = (\text{س} - ١)(\text{س} - ٢)(\text{س} - ٣)$ والمستقيمين $\text{س} = ٤$، $\text{ص} = ٠$ حيث $\text{د(س)} \geqslant ٠$

(١٨) منحنى الدالتين د، ر حيث $\text{د(س)} = ٢\text{س}^{٢}$ ، $\text{ر(س)} = ٢\text{س} + ٤$

(١٩) باستخدام التكامل المحدد أثبت أن مساحة المثلث الذي طول قاعدته يساوي أ وارتفاعه يساوي ب هي $\frac{١}{٢}$ أب

(٢٠) تفكير إبداعي: في الشكل المقابل أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د والمستقيمين $\text{ص}_{١}$، $\text{ص}_{٢}$ حيث:
$\text{د(س)} = \text{س}^{٣}$ ، $\text{ص}_{١} = \text{س} + ٦$، $\text{ص}_{٢} = -\frac{١}{٢}\text{س}$






(١٢) $\text{م} = \int_{١}^{٣} (\frac{١}{٢}\text{س} + \frac{٩}{٢})\, \text{ءس}$

$[\frac{١}{٤}\text{س}^{٢} + \frac{٩}{٢}]_{١}^{٣} = (\frac{٩}{٤} + \frac{٢٧}{٢}) - (\frac{١}{٤} + \frac{٩}{٢})$

$= ٢ + ٨ = ١٠$ وحدات مربعة

(١٣) $\text{م} = \int_{-٢}^{٥} (\text{س} + ٤)^{\frac{١}{٢}} = [\frac{٢}{٣}(\text{س} + ٤)^{\frac{٣}{٢}}]_{-٢}^{٥}$

$= \frac{٢}{٣}(٢٧ - ٢\sqrt{٢})$ وحدة مربعة

(١٤) $\int_{-٣}^{١} (٣ - ٢\text{س} - \text{س}^{٢})\, \text{ءس}$

$= [٣\text{س} - \text{س}^{٢} - \frac{١}{٣}\text{س}^{٣}]_{-٣}^{١}$

$= (٣ - ١ - \frac{١}{٣}) - (-٩ - ٩ + ٩) = ١٠\frac{٢}{٣}$ وحدات مربعة

(١٥) $\int_{١}^{٤} \frac{٤}{\text{س}^{٢}}\, \text{ءس} = [\frac{-٤}{\text{س}}]_{١}^{٤}$

$= (-١) + ٤ = ٣$ وحدات مربعة

(١٦) $\int_{١}^{٣} (\text{س}^{٣} - ٦\text{س}^{٢} + ١١\text{س} - ٦)\, \text{ءس}$

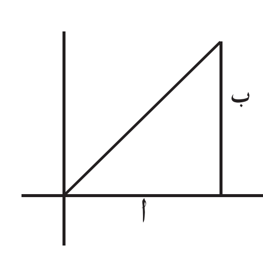
$+ \int_{٣}^{٤} (\text{س}^{٣} - ٦\text{س}^{٢} + ١١\text{س} - ٦)\, \text{ءس}$

$= [\frac{١}{٤}\text{س}^{٤} - ٢\text{س}^{٣} + \frac{١١}{٢}\text{س}^{٢} - ٦\text{س}]_{١}^{٢}$

$= (٦٤) - (\frac{-٩}{٤}) + (\text{-صفر}) - (-\frac{٩}{٤})$

$= ٦٤ + \frac{١٨}{٤} = ٦٤ + ٤{,}٥ = ٦٨{,}٥$ وحدة مربعة

(١٩) معادلة المستقيم (الوتر)




$\text{ص} = \frac{\text{ب}}{\text{أ}}\text{س}$

$\text{م} = \int_{٠}^{\text{أ}} \frac{\text{ب}}{\text{أ}}\text{س}$

$\text{ءس} = [\frac{\text{ب}}{٢\text{أ}}\text{س}^{٢}]^{\text{أ}}$

$\text{م} = \frac{\text{ب}}{٢\text{أ}} \times (\text{أ}^{٢} - \text{صفر}) = \frac{\text{ب}}{٢\text{أ}} \times \text{أ}^{٢} = \text{ب أ}$

(٢٠) $\text{م} = \int_{-٤}^{١} (\text{س} + ٦ + \frac{١}{٢}\text{س})\, \text{ءس}$

$+ \int_{٠}^{٢} (\text{س} + ٦ - \text{س}^{٣})\, \text{ءس}$

$= [\frac{٣}{٤}\text{س}^{٢} - ٦\text{س}]_{-٤}^{\text{صفر}} + [\frac{١}{٢}\text{س}^{٢} + ٦\text{س} - \frac{١}{٤}\text{س}^{٤}]_{٠}^{٢}$

$= -(١٢ - ٢٤) + (٢ + ١٢ - ٤)$

$= ١٢ + ١٠ = ٢٢$ وحدة مربعة

٤ - ٥

# حجوم الأجسام الدورانية

## Volumes of Revolution Solids



¤ يحل تطبيقات على إيجاد حجوم الأشكال باستخدام التكامل المحدود .

### مفردات أساسية:

محور الدوران - جسم دورانى

### المواد التعليمية المستخدمة

السبورة التعليمية - طباشير ملون - آلة حاسبة علمية - برامج رسومية للحاسوب.

### مكان التدريس:

الفصل الدراسى.

### مصادر التعلم

كتاب الطالب من ص (١٣١) إلى ص (١٣٧).

### تهيئة

¤ ناقش طلابك كيف يتولد حجم المجسم الناشئ عن الدوران كما جاء فى الأمثلة ببند فكر وناقش.

¤ توصل معهم إلى تعريف المجسم الدورانى على أنه يتولد من دوران منطقة مستوية دورة كاملة حول مستقيم ثابت فى مستويها يسمى محور الدوران.

¤ ناقش مع طلابك الأشكال المعطاة ص (١٣١) بدورانها حول المستقيم لدورة كاملة لتعطى المجسمات المناظرة أسفل كل منها.

### خلفية

فى هذا الدرس سوف يتعرف الطالب علي إيجاد حجم الجسم الناشئ من دوران منطقة مستوية حول محور وذلك باستخدام التكامل المحدد لفترة معطاة [ أ ، ب].

فإذا طلب إيجاد حجم الجسم الناشئ من دوران المساحة المحددة بالمنحنى ص = د(س) مثلا دورة كاملة حول محور السينات والمستقيمان س = أ ، س = ب فإننا نستخدم العلاقة :

$$ح = \pi \int_{أ}^{ب} [د(س)]^{2} \, ء س$$

**وسوف ندرس ايضًا فى هذا الدرس**

¤ إيجاد حجم جسم دورانى ناتج عند دوران منطقة محددة بمنحنيين.

### مخرجات تعلم الدرس

**في نهاية هذا الدرس وتنفيذ الأنشطة فيه من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:**

¤ يتعرف على مفهوم تولد الجسم الدورانى حول محور.

¤ يوجد حجم الجسم الناشئ من دوران منطقة محددة بمنحنيين.

## في بند الحجم الدوراني :

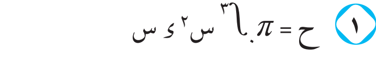
⌑ ناقش الطلاب في نص النظرية ص (١٣٢) وتوصل معهم أن حجم الجسم الناشئ من دوران المساحة المحددة بالمنحنى ص = د(س) ومحور السينات في [ا ، ب] تتحدد بالعلاقة .

$$ح = \pi \int_{ا}^{ب} [د(س)]^2 \, ء س$$

### التقييم المستمر : (الحوار والمناقشة)

⌑ ناقش الطلاب في بنود حاول أن تحل ص (١٣٢) ، ص (١٣٣) وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة :

### حلول حاول أن تحل



① $ح = \pi \int_{0}^{3} س^2 \, ء س$

$= \pi \left[ \frac{1}{3} س^3 \right]_{0}^{3} = 9\pi$ وحدة مكعبة

المجسم الناتج هو مخروط

حجم المخروط $= \frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

$= \frac{1}{3} \times \pi (3)^2 \times 3 = 9$

② أ تنشأ الكرة من دوران نصف الدائرة $س^2 + ص^2 = نق^2$ حيث $-نق \leq س \leq نق$ ، $0 \leq ص \leq نق$ دورة كاملة حول محور السينات

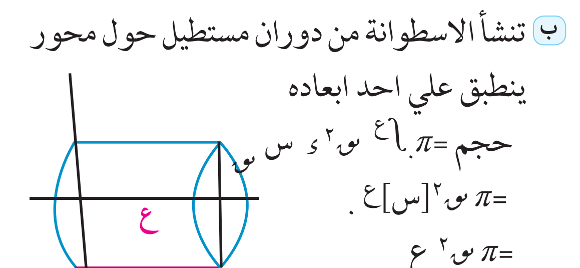
$\therefore ح = \pi \int_{-نق}^{نق} ص^2 \, ء س$

$= \pi \int_{-نق}^{نق} (نق^2 - س^2) \, ء س$

$= \pi \left[ نق^2 س - \frac{1}{3} س^3 \right]_{-نق}^{نق}$

$= \pi \left[ (\frac{2}{3} نق^3) - (-\frac{2}{3} نق^3) \right] = \frac{4}{3} \pi نق^3$

ب تنشأ الاسطوانة من دوران مستطيل حول محور ينطبق على احد ابعاده



حجم $= \pi \int_{0}^{ع} نق^2 \, ء س$

$= \pi نق^2 [س]_{0}^{ع}$ .

$= \pi نق^2 ع$

### اخطاء شائعة

⌑ قد يخطئ الطالب في التفرقة بين دوران المنطقة المستوية حول محور السينات ودوران المنطقة المستوية حول محور الصادات . لذلك أكد إلى الطالب بأنه إذا كان :

---

التكامل المحدد وتطبيقاته

**الحجم الدوراني** Volumes of Revolution

**أولًا: حجم الجسم الناشئ من دوران منطقة مستوية حول محور**

نظرية: إذا كانت د دالة متصلة على الفترة [ا، ب] ، د(س) ≥ ٠ لكل س ∈ [ا، ب] فإن حجم الجسم الناشئ من دوران المساحة المحددة بالمنحنى ص = د(س) ومحور السينات والمستقيمين س = ا ، س = ب دورة كاملة حول محور السينات هو: $ح = \pi \int_{ا}^{ب} [د(س)]^2 \, ء س$

مثال — دوران حول محور السينات

١) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المستوية المحددة بمنحنى الدالة د ومحور السينات والمستقيمين س = -١، س = ١ دورة كاملة محور السينات علمًا بأن د(س) = س² + ١

الحل: الدالة د كثيرة الحدود متصلة على الفترة [-١، ١]، د(س) ≥ ٠ لكل س ∈ [ا، ب]

بفرض أن حجم الجسم الناشئ من الدوران = ح

$\therefore ح = \pi \int_{-1}^{1} (س^2 + 1)^2 \, ء س$

$= \pi \int_{-1}^{1} (س^4 + 2س^2 + 1) \, ء س$

$= \pi [\frac{1}{5}س^5 + \frac{2}{3}س^3 + س]_{-1}^{1} = \frac{56}{15}\pi$ وحدة مكعبة



حاول أن تحل

١) أوجد حجم الجسم الناشىء من دوران المنطقة المستوية المحددة بمنحنى الدالة د ومحور السينات والمستقيمين س = ٠ ، س = ٣ دورة كاملة حول محور السينات علمًا بأن د(س) = س ما اسم المجسم الناشئ؟ بين كيف تحقق هندسيًا من صحة إجابتك.

مثال — تطبيقات الحجوم

٢) باستخدام التكامل أثبت أن حجم المخروط الدائري القائم يساوي $\frac{\pi}{3}$ نق² ع حيث نق طول نصف قطر قاعدته، ع ارتفاعه.

الحل: ينتج المخروط الدائري القائم عن دوران مثلث قائم الزاوية بحيث يقع أحد ضلعيه القائمة على محور السينات دورة كاملة حول محور السينات.

كتاب الرياضيات البحتة – التفاضل والتكامل ١٣٢

---

حجوم الأجسام الدورانية ٤ - ٥

نوجد العلاقة بين س ، ص = د(س)

ظا θ = $\frac{ص}{س}$ (١) ∴ ص = س ظا θ = د(س)

$\therefore ح = \pi \int_{0}^{ع} [د(س)]^2 \, ء س = \pi \int_{0}^{ع} س^2 ظا^2 θ \, ء س$

$= [\frac{\pi}{3} س^3 ظا^2 θ]_{0}^{ع} = \frac{\pi}{3} ع^3 ظا^2 θ$ (٢)

من (١) ظا θ = $\frac{ص}{س} = \frac{نق}{ع}$ ∴ ظا² θ = $\frac{نق^2}{ع^2}$

بالتعويض في (٢) ∴ ح = $\frac{\pi}{3} \times \frac{نق^2}{ع^2} \times ع^3 = \frac{\pi}{3}$ نق² ع

حاول أن تحل

٢) باستخدام التكامل أثبت أن:

أ) حجم الكرة = $\frac{4}{3}\pi$ نق³ (نق طول نصف قطر الكرة)

ب) حجم الأسطوانة الدائرية القائمة = π نق² ع (نق طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة ، ع ارتفاعها)

تذكر أن: معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل (٠، ٠) وطول نصف قطرها (نق) هي: س² + ص² = نق²

مثال — دوران حول محور السينات

٣) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $\frac{س^2}{ا^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = 1$ ومحور السينات، حيث ا، ب ثابتان، دورة كاملة حول محور السينات.

الحل: ∵ الدوران حول محور السينات ∴ ص² = ب² (١ - $\frac{س^2}{ا^2}$)

حدود التكامل: ص = ٠ ∴ س² = ا² أي أن س = -ا، س = ا

$ح = \pi \int_{-ا}^{ا} ب^2 (1 - \frac{س^2}{ا^2}) \, ء س = 2\pi ب^2 \int_{0}^{ا} (1 - \frac{س^2}{ا^2}) \, ء س$ (لماذا؟)

$= 2\pi ب^2 [س - \frac{س^3}{3ا^2}]_{0}^{ا} = 2\pi ب^2 [ا - \frac{1}{3}ا]$

$= \frac{4}{3}\pi ب^2 ا$ وحدة مكعبة.

حاول أن تحل

٣) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى ص = ٢س - س² ومحور السينات، دورة كاملة حول محور السينات.

كتاب الطالب – الصف الثالث الثانوي ١٣٣

دوران المنطقة المستوية حول محور السينات في الفترة [أ، ب] فإن: $ح = \pi \int_{أ}^{ب} ص^2 \, ء س$

دوران المنطقة المستوية حول محور الصادات في الفترة [أ، ب] فإن: $ح = \pi \int_{جـ}^{ء} س^2 \, ء ص$

## التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

¤ ناقش مع طلابك ما ورد في بند حاول أن تحل وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة

## حلول حاول أن تحل

(٤) $ص = ٢ س - س^2$

حدود التكامل: ص = ٠ عندما س = ٠ ، س = ٢

$\therefore$ الحجم $= \pi \int_{١}^{ب} ص^2 \, ء س$

$= \pi \int_{٠}^{٢} (٤س^2 - ٤س^3 + س^4) \, ء س$

$= [\frac{٤}{٣} س^3 - س^4 + \frac{١}{٥} س^5]_{٠}^{٢}$

$= \frac{١٦}{١٥} \pi$

(٥) الدوران حول محور الصادات

الحجم $= \pi \int_{جـ}^{ء} س^2 \, ء ص$

$= \pi \int_{٠}^{٦} ص \, ء ص$

$= \pi [\frac{١}{٢} ص^2]_{٠}^{٦} = ١٨ \pi$ وحدة مكعبة

## في بند (نظرية) ص (١٣٤)

**أكد إلى الطلاب على ما يأتي:**

(١) إذا دارت المنطقة المحددة بالمنحنيين $ص_1 = د(س)$ ، $ص_2 = ر(س)$ فإن الحجم الناشئ هو:

$ح = \pi \int_{١}^{ب} (ص_1^2 - ص_2^2) \, ء س$

(٢) إذا دارت المنطقة المحددة بالمنحنيين $س_1 = د(ص)$، $س_2 = ر(ص)$ فإن الحجم الناشئ من الدوران هو:

$ح = \pi \int_{جـ}^{ء} (س_1^2 - س_2^2) \, ء ص$



**ملاحظة هامة**

إذا كان دوران المنطقة المستوية حول محور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب فإن: $ح = \pi \int_{أ}^{ب} ص^2 \, ء س$

إذا كان دوران المنطقة المستوية حول محور الصادات والمستقيمين ص = جـ ، ص = ء فإن: $ح = \pi \int_{جـ}^{ء} س^2 \, ء ص$



**مثال** — دوران حول محور الصادات

(٤) أوجد حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $ص = س^2 + ١$ ومحور الصادات والمستقيم ص = ٥ دورات كاملة حول محور الصادات.

**الحل:**

$\because ص = س^2 + ١$ والدوران حول محور الصادات

$\therefore س^2 = ص - ١$

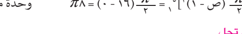
عند س = ٠ ص = ١

حدود التكامل ص = ١ ، ص = ٥

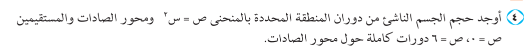
$ح = \pi \int_{جـ}^{ء} س^2 \, ء ص = \pi \int_{١}^{٥} (ص - ١) \, ء ص$

$= [\frac{\pi}{٢} (ص - ١)^2]_{١}^{٥} = \frac{\pi}{٢}(١٦ - ٠) = ٨\pi$ وحدة مكعبة





**حاول أن تحل**



(٤) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $ص = س^2$ ومحور الصادات والمستقيمين ص = ٠، ص = ٦ دورات كاملة حول محور الصادات.

### ثانيًا: حجم الجسم الناشئ من دوران منطقة محددة بمنحنيين

**نظرية**

إذا كانت د، ر دالتين متصلتين على الفترة [أ، ب] ، د(س) ⩾ ٠ ، هـ (س) ⩾ ٠ لكل س ∈ [أ، ب]، فإن حجم الجسم الدورانى ح الناتج عن دوران المنطقة المحددة بالمنحنيين والمستقيمين س = أ ، س = ب دورة كاملة حول محور السينات هو:

$ح = \pi \int_{أ}^{ب} [د(س)^2 - ر(س)^2] \, ء س$





**لاحظ أن**

١- إذا دارت المنطقة المحددة بالمنحنيين المتقاطعين $ص_1 = د(س)$، $ص_2 = ر(س)$ حيث $ص_1 \geqslant ص_2$ لكل س ∈ [أ، ب]

وهى المنطقة الملونة بالشكل المقابل، دورة كاملة حول محور السينات فإن الإحداثيين السينيين لنقطتى تقاطع المنحنيين هما حدود التكامل أ، ب حيث أ < ب ويكون حجم الجسم الناشئ ح هو:

$ح = \pi \int_{أ}^{ب} (ص_1^2 - ص_2^2) \, ء س$

أى: $ح = \pi \int_{أ}^{ب} ص_1^2 \, ء س - \pi \int_{أ}^{ب} ص_2^2 \, ء س$



٢- إذا دارت المنطقة المحددة بالمنحنيين المتقاطعين $س_1 = د(ص)$ ، $س_2 = ر(ص)$ حيث $س_1 \geqslant س_2$ لكل ص ∈ [جـ ، ء] دورة كاملة حول محور الصادات فإن الإحداثيات الصاديين لنقطتى التقاطع هما حدود التكامل جـ، ء حيث جـ < ء ويكون

$ح = \pi \int_{جـ}^{ء} (س_1^2 - س_2^2) \, ء ص$

أى: $ح = \pi \int_{جـ}^{ء} س_1^2 \, ء ص - \pi \int_{جـ}^{ء} س_2^2 \, ء ص$



**مثال** — حجم منطقة محددة بمنحنين حول محور السينات

(٥) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $ص = س^2$ والمستقيم ص = ٢ س دورة كاملة حول محور السينات.

**الحل:**

بفرض $ص_1 = س^2$ ، $ص_2 = ٢ س$

لإيجاد نقط التقاطع نضع $ص_1 = ص_2$

$\therefore$ س = ٠ أو س = ٢

$\because ص_2 \geqslant ص_1$ لكل س ∈ [٠ ، ٢] كما هو واضح من الشكل

$\therefore ح = \pi \int_{أ}^{ب} (ص_2^2 - ص_1^2) \, ء س$

$= \pi \int_{٠}^{٢} (٢ س)^2 - (س^2)^2 \, ء س$

$\therefore ح = \pi \int_{٠}^{٢} (٤س^2 - س^4) \, ء س$

$= \pi \, [\frac{٤}{٣}س^3 - \frac{١}{٥}س^5]_{٠}^{٢}$

$= \pi \, (\frac{٣٢}{٣} - \frac{٣٢}{٥}) = ٣٢ \pi \times \frac{٢}{١٥} = \frac{٦٤ \pi}{١٥}$ وحدة مكعبة

## التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

⌑ ناقش مع طلابك ماورد فى بند حاول أن تحل وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة .

(٦) $٢ص = س_١^٢$ ، $ص = \sqrt{س_٢}$ $\quad$ $س_٢ = ص^٢$

$س_١ = س_٢$

$\therefore ٢ص = ص^٤$ ص = ٠ ، $ص = \sqrt[٣]{٢}$

$الحجم = \pi \int (س_١^٢ - س_٢^٢) \, ءس$

$= \pi \int_{٠}^{\sqrt[٣]{٢}} (٢ص - ص^٤) \, ءص$

$= \pi \left[ص^٢ - \frac{١}{٥}ص^٥\right]_{٠}^{\sqrt[٣]{٢}}$

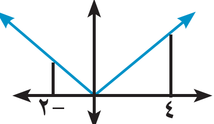
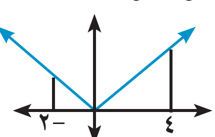
$= \pi\left[\sqrt[٣]{٤} - \frac{١}{٥} \times ٢\sqrt[٣]{٤}\right] = \frac{١}{٥}\sqrt[٣]{٤}$ وحدة مكعبة

## حلول بعض تمارين (٤ -٥)

(١) د $\quad$ (٢) ب $\quad$ (٣) ب

(٤) جـ كرة طول نصف قطرها ٢

(٨) $الحجم = \pi \int_{٠}^{٤} س^٢ ءس + \pi \int_{-٢}^{٠} س^٢ ءس$


$= \left[\frac{٦٤}{٣} + \frac{٨}{٣}\right]$

$= ٢٤\pi$ وحدة مكعبة

(١٦) **أولاً :**

$ح = \pi \int_{أ}^{ب} ص^٢ ءس = ٤ \int_{٠}^{٤} (٤ - س) \, ءس$

$= \pi\left[٤س - س^٢\right]_{٠}^{٤}$

$= ٨\pi$ وحدة مكعبة

**ثانيًا:**

$ح = \pi \int س^٢ ءص = \pi \int_{-٢}^{٢} (٤ - ص^٢)^٢ \, ءص$

$= \pi \int_{-٢}^{٢} (١٦ - ٨ص^٢ + ص^٤) \, ءص$

$= \pi\left[١٦ص - \frac{٨}{٣}ص^٣ + \frac{ص^٥}{٥}\right]_{-٢}^{٢} = \frac{٥١٢}{١٥}\pi$

(١٧) نقط التقاطع $\frac{٤}{س} = ٥ - س$

$\therefore ٤ = ٥س - س^٢$ $\qquad$ $س^٢ - ٥س + ٤ = ٠$

س = ٤ أو س = ١

$ح = \pi \int (ص_١^٢ - ص_٢^٢) \, ءس$

$= \pi \int_{١}^{٤} (٥ - س)^٢ - \frac{١٦}{س^٢} \, ءس$

$= \pi\left[\frac{-١}{٣}(٥ - س)^٣ + \frac{١٦}{س}\right]_{١}^{٤} = ٩\pi$



؟ حاول أن تحل

(٥) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيين $ص = \sqrt{س}$ ، $ص = س^٢$ دورة كاملة حول محور السينات.

**مثال**

### دوران منطقة محددة بمنحنين حول محور الصادات

(٦) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $ص = ٤ - س^٢$، والمستقيم $٢س + ص = ٤$ دورة كاملة حول محور الصادات.

**الحل:**

$\because$ الدوران حول محور الصادات

$\therefore س_١^٢ = ٤ - ص$ ، $س_٢^٢ = (٢ - \frac{ص}{٢})^٢$

عند نقط التقاطع $س_١ = س_٢$

$٤ - ص = (٢ - \frac{ص}{٢})^٢$ $\qquad$ $\therefore ص - \frac{ص^٢}{٤} = صفر$

$ص(ص - ٤) = ٠$ $\qquad$ ص = ٠ ، ص = ٤

ويكون $س_١^٢ > س_٢^٢$ $\qquad$ لكل س ∈ [٠، ٤]

$ح = \pi \int_{جـ}^{ء} (س_١^٢ - س_٢^٢) \, ءص = \pi \int_{٠}^{٤} [(٤ - ص) - (٢ + \frac{ص}{٢})^٢] \, ءص$

$= \pi \int_{٠}^{٤} (ص - \frac{ص^٢}{٤}) \, ءص = \pi\left[\frac{١}{٢}ص^٢ - \frac{ص^٣}{١٢}\right]_{٠}^{٤}$

$= \pi\left[٨ - \frac{١٦}{٣}\right] = \frac{٨}{٣}\pi$ وحدة مكعبة

؟ حاول أن تحل

(٦) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيين $٢ص = س^٢$، $ص = \sqrt{س}$ دورة كاملة حول محور الصادات.




**اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:**

(١) حجم الجسم الناشيء من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $ص = ٢\sqrt{س}$ ، ص = ٠ ، س = ١ دورة كاملة حول محور السينات يساوى

أ) $-\pi$ $\quad$ ب) ٠ $\quad$ جـ) $\pi$ $\quad$ د) $٢\pi$

(٢) حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $ص = \frac{١}{س}$ والمستقيمين ص = ١، ص = ٢ ومحور الصادات دورة كاملة حول محور الصادات يساوى

أ) $\frac{\pi}{٤}$ $\quad$ ب) $\frac{\pi}{٢}$ $\quad$ جـ) $\pi$ $\quad$ د) $٢\pi$





(٣) حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $ص = س^٢$ والمستقيم ص = ١ دورة كاملة حول محور الصادات يساوى

أ) $\pi$ $\quad$ ب) $\frac{١}{٢}\pi$ $\quad$ جـ) $\frac{١}{٤}\pi$ $\quad$ د) $٢\pi$

(٤) $\pi \int_{-٢}^{٢} (٤ - س^٢) \, ءس$ ، هو حجم

أ) كرة طول نصف قطرها ٤ وحدات $\quad$ ب) مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٤ وحدات

جـ) كرة طول نصف قطرها ٢ وحدة $\quad$ د) أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ٤ وحدات

**أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيات والمستقيمات المعطاة دورة كاملة حول محور السينات فى كل مما يأتى:**

(٥) ص = س ، س = ٠ ، ص = ٠ $\quad$ (٦) ص = ٣ - س ، س = ٠ ، ص = ٠

(٧) $ص = \frac{١}{س}$ ، س = ١، س = ٤ ، ص = ٠ $\quad$ (٨) ص = |س| ، س = -٢ ، س = ٤ ، ص = ٠

**أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيات والمستقيمات المعطاة دورة كاملة حول محور الصادات فى كل مما يأتى:**

(٩) ص = س ، ص = ١ ، س = ٠ $\quad$ (١٠) $ص = س^٢$ ، س = ٠ ، ص = ٠ ، ص = ٨

(١١) $ص = ٤ - س^٢$ ، س = ٠ ، ص = ٠ $\quad$ (١٢) $ص = س^٣$ ، س = ٠ ص = ٠ ، ص = ٨

(١٣) س + ٢ص = ٠ ، س = ٠ ، ص = ٠

**أجب عن كل مما يأتى:**

(١٤) أوجد حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $ص^٢ = ٤ - س$ والمستقيم س = ٠ عندما تدور هذه المنطقة دورة كاملة.

**أولا**: حول محور السينات $\quad$ **ثانيًا**: حول محور الصادات

(١٥) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $ص = \frac{٤}{س}$ والمستقيم س + ص = ٥ دورة كاملة حول محور السينات.

(١٦) تفكير إبداعى: إذا كانت النقط أ(-٢، ٠) ، ب(١، ٥) ، جـ (٤، ٠) رؤوس المثلث أ ب جـ فأوجد حجم الجسم الناشيء عن دوران المثلث أ ب جـ دورة كاملة حول محور السينات.

## تمارين عامة (التكامل) ص ١٤٨

### اختر

① جـ ② د ③ ب ④ جـ

⑤ أ ⑥ ب ⑦ جـ

### اجب عن الاسئلة الآتية :

⑧ $\text{ءص} = ٦\text{س ءس}$ ⑫ $\text{ءس} = (٢\text{س}+٣)\,\text{هـ}^{\text{س}^{٢}+٣\text{س}}\,\text{ءس}$

⑭ $\text{ءص} = \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢}+١}\,\text{ءس}$ ⑰ $\int_{-٢}^{٥}\text{س}^{٢}\,\text{ءس}$

⑱ $\int_{٤}^{-١}\sqrt{\text{س}+٦}\,\text{ءس} + \int_{-١}^{٤}\sqrt{\text{س}+٦}\,\text{ءس}$

$= \int_{-٤}^{٤}\sqrt{\text{س}+٦}\,\text{ءس}$

⑲ $\int_{٢}^{٣}\text{ك ءس} + \int_{٣}^{٦}\text{ك ءس} - \int_{٣}^{٦}\text{ك ءس} = \int_{٣}^{٦}\text{ك ءس}$

⑳ $\int_{-٤}^{٤}\text{س}^{٢} + \text{س} + \int_{٤}^{٥}\text{س}^{٢}\,\text{ءس} + \int_{-٤}^{٥}\text{س}^{٢}\,\text{ءس}$

㉒ $\text{ت}(\text{س}) = \int_{-١}^{\text{س}}(٣\text{ع}^{٢}-٦\text{ع})\,\text{ءع}$

$= [\text{ع}^{٣} - ٣\text{ع}^{٢}]_{-١}^{\text{س}} = \text{س}^{٣} - ٣\text{س}^{٢} + ٤$

ت(-١) = صفر ، ت(٣) = ٤

㉔ $[\frac{١}{٣}\text{س}^{٣} - \frac{١}{\text{س}}]_{٢}^{٤} = \frac{٢٢٧}{١٢}$

㉗ $\int_{-١}^{١}\frac{(\sqrt[٣]{\text{س}}+٢)(\sqrt[٣]{\text{س}}^{٢} - ٢\sqrt[٣]{\text{س}}+٤)}{(\sqrt[٣]{\text{س}}+٢)}\,\text{ءس}$

$= [\frac{٣}{٥}\text{س}^{\frac{٥}{٣}} - \frac{٣}{٢}\text{س}^{\frac{٤}{٣}} + ٤\text{س}]_{-١}^{١} = \frac{٤٦}{٥}$

㉚ نفرض $\text{س} - ٥ = \text{ص}$ $\text{ءس} = \text{ءص}$

$= \int(\text{ص}+٥)\,\text{ص}^{٢}\,\text{ءص}$

$= \int\text{ص}^{٤} + ٥\text{ص}^{٣}\,\text{ءص} = \frac{١}{٥}\text{ص}^{٥} + \frac{٥}{٤}\text{ص}^{٤} + \text{ث}$

$= \frac{١}{٥}(\text{س}-٥)^{٥} + \frac{٥}{٤}(\text{س}-٥)^{٤} + \text{ث}$

㉛ نفرض $١ + \sqrt{\text{س}} = \text{ص}$ $\frac{\text{ءس}}{٢\sqrt{\text{س}}} = \text{ءص}$

$\therefore = \int\frac{١}{\text{ص}^{٣}}\,\text{ءص} = \int\text{ص}^{-٣}\,\text{ءص}$

$= \frac{-١}{٢\text{ص}^{٢}} + \text{ث} = \frac{-١}{٢(١+\sqrt{\text{س}})^{٢}} + \text{ث}$

㉝ $\int\text{قا}^{٤}\text{س طا س ءس}$

نفرض طا س = ص $\therefore$ $\text{قا}^{٢}\text{س ءس} = \text{ءص}$

$\therefore = \int\text{قا}^{٢}\text{س طا س}\,(\text{قا}^{٢}\text{س})\,\text{ءس}$

$\int\text{قا}^{٢}\text{س طاس}\,(١+\text{طا}^{٢}\text{س})\,\text{ءس}$

$\int(١+\text{ص}^{٢})\,\text{ص ءص}$

## تمارين عامة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

① إذا كان د(س) = $\int(٣\text{س}^{٢}-٥)\,\text{ءس}$ وكان د(٢) = ٣ ، فإن د(-٢)

أ - ٦ ب -٣ جـ ٧ د ١٢

② إذا كان $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{س} + \frac{١}{\text{س}}$، ص = $\frac{١}{٢}$ عند س = ١، عندما س = هـ فإن ص تساوى:

أ $\text{هـ}^{٢} - \text{هـ}$ ب $\frac{\text{هـ}^{٢}-١}{٢}$ جـ $\frac{\text{هـ}^{٢}+١}{٤}$ د $\frac{\text{هـ}^{٢}}{٢}+١$

③ $\int\text{ظا}^{٢}\text{س ءس}$ يساوى

أ ظا س - س + ث ب ظا س + س + ث جـ $\text{قا}^{٤}\text{س} + \text{ث}$ د $\frac{١}{٣}\text{ظا}^{٣}\text{س} + \text{ث}$

④ إذا كان $\int(٣\text{س}-٢)\,\text{هـ}^{٣\text{س}+١}\,\text{ءس} = \text{ص ع} - \int\text{ع ءص}$ فإن $\int\text{ع ءص}$ يساوى

أ $-\text{هـ}^{٣\text{س}+١} + \text{ث}$ ب $-\frac{١}{٣}\text{هـ}^{٣\text{س}+١} + \text{ث}$ جـ $\frac{١}{٣}\text{هـ}^{٣\text{س}+١} + \text{ث}$ د $\text{هـ}^{٣\text{س}+١} + \text{ث}$

⑤ إذا كان ر(س) = $\int_{١}^{\text{س}}\text{د(س) ءس} = ٣\text{س}^{٢} - ٧\text{س} + \text{ك}$ ، ك ∋ ع فإن ك تساوى

أ ٤ ب صفر جـ ٦ د ٧

⑥ إذا كان $\int_{٢}^{٥}\text{د(س) ءس} = ٤$، فإن $\int_{٢}^{٥}[٣\,\text{د(س)} - ١]\,\text{ءس}$ يساوى

أ ٩ ب ١١ جـ ١٢ د -٨

⑦ حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى د(س) = $\text{س}^{٢}$ ومحور السينات والمستقيمين س = -٢، س = ٢ دورة واحدة حول محور السينات يساوى

أ $\frac{١٦}{٥}\pi$ ب $\frac{٣٢}{٥}\pi$ جـ $\frac{٦٤}{٥}\pi$ د $٤\pi$

أوجد تفاضلى كل من:

⑧ ص = $٣\text{س}^{٢} - ١$ ⑨ ص = $\sqrt{(٢\text{س}+٣)^{٥}}$ ⑩ ص = $(\text{س} + \frac{١}{\text{س}})^{٣}$

⑪ ص = $\text{هـ}^{-٥\text{س}}$ ⑫ ص = $\text{هـ}^{\text{س}^{٢}+٣\text{س}}$ ⑬ ص = $\text{هـ}^{\text{حتا}\,٢\text{س}}$

⑭ ع = $\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٢}+١)$ ⑮ ع = $(\text{لو}_{\text{هـ}}\frac{١٠}{\text{س}})^{٢}$ ⑯ ع = $\text{لو}_{\text{هـ}}$ ظتا (٣س - ١)

عبر عن كل مما يأتى باستخدام تكامل واحد

⑰ $\int_{٠}^{٥}\text{س}^{٢}\,\text{ءس} + \int_{-٢}^{٠}\text{س}^{٢}\,\text{ءس}$ ⑱ $\int_{-٤}^{-١}\sqrt{\text{س}+٦}\,\text{ءس} - \int_{٤}^{-١}\sqrt{\text{س}+٦}\,\text{ءس}$

⑲ $\int_{٢}^{٦}\text{ك ءس} + \int_{٣}^{٢}\text{ك ءس}$ ⑳ $\int_{٠}^{٤}٢\text{س}^{٢}\,\text{ءس} + \int_{٤}^{٥}\text{س}^{٢}\,\text{ءس}$

أجب عن ما يأتى:

㉑ إذا كان $\int_{٢}^{٤}\text{د(س) ءس} = ٥$، $\int_{٢}^{٤}\text{ر(س) ءس} = -٣$ فأوجد:

أ $\int_{٢}^{٤}٣\text{د(س) ءس}$ ب $\int_{٤}^{٢}٢\,\text{ر(س) ءس}$

جـ $\int_{٢}^{٤}[٣\text{د(س)} - ٢\,\text{ر(س)}]\,\text{ءس}$ د $\int_{٢}^{٤}[٣\,\text{ر(س)} + ٤\text{س}]\,\text{ءس}$

١٤٠ كتاب الرياضيات البحتة - التفاضل والتكامل

㉒ إذا كانت د(ع) = $٣\text{ع}^{٢} - ٦\text{ع}$ ، ت (س) = $\int_{-١}^{\text{س}}\text{د(ع) ءع}$ ، حيث س ∋ [-١، ٤]

أوجد ت(س) ثم أوجد ت (-١) ، ت (٣)

㉓ إذا كان دً(س) = ٦س - ٤ ، دَ (١) = ٢ ، د( ٠ ) = -٤ فأوجد د(س)

أوجد التكاملات المحددة التالية:

㉔ $\int_{٢}^{٤}(\text{س}^{٢} + \frac{١}{\text{س}^{٢}})\,\text{ءس}$ ㉕ $\int_{١}^{٣}\frac{٦ - \text{س}^{٤}}{٢\text{س}^{٢}}\,\text{ءس}$ ㉖ $\int_{١}^{٤}\frac{\text{س} - ١}{\sqrt{\text{س}} - ١}\,\text{ءس}$

㉗ $\int_{-١}^{١}\frac{\text{س}+٨}{\sqrt[٣]{\text{س}}+٢}\,\text{ءس}$ ㉘ $\int_{-٤}^{٤}\sqrt{١٦ - \text{س}^{٢}}\,\text{ءس}$ ㉙ $\int_{٠}^{٢}\sqrt{٤ - \text{س}^{٢}}\,\text{ءس}$

باستخدام التعويض المناسب أوجد التكاملات الآتية:

㉚ $\int\text{س}\,(\text{س} - ٥)^{٣}\,\text{ءس}$ ㉛ $\int\frac{\text{ءس}}{\sqrt{\text{س}}\,(١+\sqrt{\text{س}})^{٣}}$ ㉜ $\int\text{س قا}^{٢}(\text{س}^{٢}+٢)\,\text{ءس}$

㉝ $\int\text{قا}^{٤}\text{س طاس ءس}$ ㉞ $\int\text{س هـ}^{\text{س}^{٢}+٣}\,\text{ءس}$ ㉟ $\int\frac{\text{هـ}^{٢\text{س}}+\text{س}}{\text{هـ}^{٢\text{س}}+\text{س}^{٢}}\,\text{ءس}$

باستخدام التجزىء المناسب أوجد التكاملات الآتية:

㊱ $\int٣\text{س}^{٣}\sqrt{٢\text{س}+٣}\,\text{ءس}$ ㊲ $\int\text{س}^{٤}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س ءس}$ ㊳ $\int_{١}^{٢}٤\text{س هـ}^{٢\text{س}}\,\text{ءس}$

أجب عن يلي:

㊴ أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين ص = ٧ + ٢س - $\text{س}^{٢}$ ، ص = $(\text{س} - ١)^{٢}$

㊵ أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين ص = ٩ - $\text{س}^{٢}$، ص = $\text{س}^{٢}$ + ١ والمستقيمين س = ٠، س = ٣

㊶ أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين ص = ٩ - $\text{س}^{٢}$ ، ص = $\text{س}^{٢}$ + ١ ومحور السينات والمستقيمين س = ٠، س = ٣

㊷ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى ص = $\frac{١}{\text{س} - ١}$ والمستتقيمين س = ٢ ، س = ٤ ومحور السينات دورة كاملة حول.

أ محور السينات ب محور الصادات

㊸ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى ص = $\sqrt{٢\text{س}}$ ومحور السينات والمماس للمنحنى عند النقطة (٢، ٢) الواقعة عليه عندما تدور هذه المنطقة دورة كاملة حول محور السينات.

㊹ إذا كان معدل دخل شركة يعطى بالعلاقة دَ(ن) = ٩ - $\sqrt[٣]{\text{ن}}$ ومعدل التكلفة كَ (ن) = ١ + $\sqrt[٣]{\text{ن}}$ مقدرًا بملايين الجنيهات سنويًا كما يوضحها الشكل المقابل.

أ أوجد أقصى فترة زمنية ن تعمل بها الشركة بهذه المعدلات.

ب بما تفسر المساحة الملونة فى الشكل المقابل.

جـ أوجد أقصى ربح ممكن للشركة بهذه المعدلات.

ص
دَ(ن) = ٩ - $\sqrt[٣]{\text{ن}}$
كَ(ن) = ١ + $\sqrt[٣]{\text{ن}}$
ن
و

١٤١ كتاب الطالب - الصف الثالث الثانوى

$= \int$ ص + ص$^{3}$ ى ص = $\frac{1}{2}$ ص$^{2}$ + $\frac{1}{4}$ ص$^{4}$ + ث

$=\frac{1}{2}$ ظا$^{2}$س + $\frac{1}{4}$ ظا$^{4}$ س + ث

**(٣٥)** نفرض هـ$^{2س}$ + س$^{2}$ = ص

$\therefore$ (٢ هـ$^{2س}$ + ٢س ) ى س = ى ص

$\therefore$ $\int \frac{\frac{1}{2} ى ص}{ص}$ = $\frac{1}{2}$ لو$_{هـ}$ ص + ث

## الاختبار التراكمي

(١) ب (٢) جـ

(٣) أ (٤) جـ

(٥) د (٦) د

(٧) أ $\sqrt{س^{2}+6س}$ + ث

(٨) ١٠٦

(١١) أ صفر ب صفر

(١٢) -١٣

(١٥) ١٧١٣

## اختبار تراكمي

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات الآتية:

(١) $\int$ (٤ - قتا س ظتا س) ى س يساوى:

أ ٤س - قتا س + ث ب ٤س + قتا س + ث

جـ ٤س - ظتا س + ث (د) ٤س + ظتا س + ث

(٢) $\int \frac{هـ^{س}}{هـ^{س} - 3}$ ى س يساوى:

أ - $\frac{1}{2}$ (هـ$^{س}$ - ٣) + ث ب - لو$_{هـ}$ |هـ$^{س}$ - ٣| + ث

جـ لو$_{هـ}$ |هـ$^{س}$ - ٣| + ث (د) $\frac{1}{2}$ لو$_{هـ}$ |هـ$^{س}$ - ٣| + ث

(٣) $\int_{0}^{2}$ (٢ - |س|) ى س يساوى:

أ ٤ ب ٢ جـ ١ د صفر

(٤) مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى ص = $\sqrt{4 - س^{2}}$ ومحور السينات مقدرة بالوحدات المربعة يساوى: ........ .

أ ٢ ب ٤ جـ ٢ $\pi$ د ٤ $\pi$

(٥) إذا كان $\int_{1}^{3}$ د(س) ى س = ٥ ، $\int_{3}^{1}$ ر(س) = ٧، فإن $\int_{1}^{3}$ (٤ د(س) + ر(س) - ٣) ى س يساوى:

أ -١٢ ب -٧ جـ ١٢ د ١٩

(٦) حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بين المنحنى ص = $\frac{2}{س}$ والمستقيمات س = ١، س = ٤، ص = ٠ دورة كاملة حول محور السينات مقدرًا بالوحدات المكعبة يساوى: ........ .

أ $\frac{\pi}{3}$ ب $\frac{\pi}{2}$ جـ ٢ $\pi$ د ٣ $\pi$

اجب عن ما يأتى:

(٧) أوجد التكاملات الآتية:

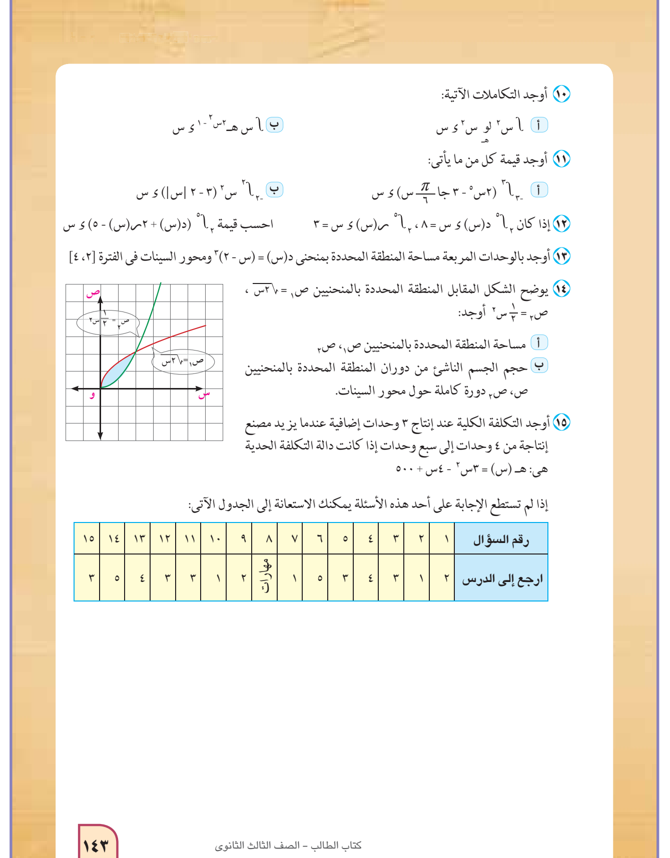
أ $\int \frac{س + 3}{\sqrt{س^{2} + 6س}}$ ى س ب $\int$ س$^{2}$ $\sqrt{س - 3}$ ى س

(٨) إذا كانت د(س) = $\int$ (س + ١) (٢س$^{2}$ + ٤س - ١) ى س، د(-٢) = $\frac{9}{8}$ **فأوجد د(٣)**

(٩) أوجد التكاملات الآتية:

أ $\int$ طا س قا$^{3}$ س ى س ب $\int \sqrt{1 + جا س}$ جتا س ى س

١٤٢ كتاب الرياضيات العامة – القسم الأدبى – الصف الثانى الثانوى



(١٠) أوجد التكاملات الآتية:

أ $\int$ س$^{2}$ لو$_{هـ}$ س$^{2}$ ى س ب $\int$ س هـ$^{2س^{2} - 1}$ ى س

(١١) أوجد قيمة كل من ما يأتى:

أ $\int_{-3}^{3}$ (٢س$^{5}$ - ٣ جا $\frac{\pi}{6}$ س) ى س ب $\int_{-2}^{2}$ س$^{2}$ (٣ - ٢ |س|) ى س

(١٢) إذا كان $\int_{2}^{5}$ د(س) ى س = ٨ ، $\int_{2}^{5}$ ر(س) ى س = ٣ احسب قيمة $\int_{2}^{5}$ (د(س) + ٢ر(س) - ٥) ى س

(١٣) أوجد بالوحدات المربعة مساحة المنطقة المحددة بمنحنى د(س) = (س - ٢)$^{3}$ ومحور السينات فى الفترة [٢، ٤]

(١٤) يوضح الشكل المقابل المنطقة المحددة بالمنحنيين ص$_{1}$ = $\sqrt{2س}$ ، ص$_{2}$ = $\frac{1}{2}$ س$^{2}$ أوجد:

أ مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين ص$_{1}$، ص$_{2}$

ب حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيين ص، ص$_{2}$ دورة كاملة حول محور السينات.



(١٥) أوجد التكلفة الكلية عند إنتاج ٣ وحدات إضافية عندما يزيد مصنع إنتاجة من ٤ وحدات إلى سبع وحدات إذا كانت دالة التكلفة الحدية هى: هـ (س) = ٣س$^{2}$ - ٤س + ٥٠٠

إذا لم تستطع الإجابة على أحد هذه الأسئلة يمكنك الاستعانة إلى الجدول الآتى:

| رقم السؤال | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ | ٧ | ٨ | ٩ | ١٠ | ١١ | ١٢ | ١٣ | ١٤ | ١٥ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ارجع إلى الدرس | ٢ | ١ | ٣ | ٤ | ٣ | ٥ | ١ | مهارات | ٢ | ١ | ٣ | ٣ | ٤ | ٥ | ٣ |

١٤٣ كتاب الطالب – الصف الثالث الثانوى

# ملاحق دليل المعلم

- Daire, S. and other, Geometry U.S.A, prentice Hall
- Edward D. Gaughan and others, (1982) *Algebra, Second* course 1982, Scott Foresman.
- Eleanor Beoher and other, *Advanced Algebra*, U.S.A Prentice Hall
- Ernest, H. Richard, *P., (2005)* and others, *Introductory mathematical Analysis*, Eleventh Edit*ion,* pearson, prentice Hall.
- G.N YAkovlEv, (1982) *Problem Book in High school mathematics*, Mir Publishers, moscow.
- George, B., Maurice, D., *Joet*, R*(2011). thomas' colulus*, twelfth Edition.
- J.F Talgert and H.H.Heng, (1992) *Addition*al Mathematics, FiFth Editi*on, Long*man ingapore publishers *(Ptc*) limited.
- John J . Bradiy and other, *Algebra, U.S.*A, prentice Hall, Zolo
- Larson, R.(2013). Precalculus, q the *Edition, Brooks cole.*
- *McGraw-Hil*l, (2005). Advanced Mathematical calconcepts: Precalculus with Applications, 1*st Edition.*
- *Randall I* . Charles and others, (2010) Math Corse 3 . U.S.A, prentice Hall
- Rayner, General D.(1984) Mathemematics, Revision and Practice, Second edition, oxford university press.
- Stewart, J (2012) calculus: Early transcendentals
- Sullivan, M.(1996). Mathematics: An Applied Apprach, 8th Edition, John wileyand sone, inc.
- Sullivan, M., (2015) Trigonometry: A unit circle Approach, pearson education, Canda.
- Vernon, C, Richard, A (2012) college Algebra and trigonometry .


## ثانيًا: المواقع الإلكترونية

(http://geogebra.org/com)

(http://www.pedowan.dk)

(http:// www. phschool.com)

www.NCTM.org

http://www.keycurriculum.com/products/ sketchpad

# قاموس المصطلحات التربوية والعلمية

| المصطلح | Term |
| --- | --- |
| أس | Exponent |
| أساس | Base |
| أسس كسرية | Rational Exponents |
| اشتقاق بارامترى | Parametric Defferentiation |
| اشتقاق ضمنى | Implicit Defferentiation |
| الإيراد الحدى | Marginal Revenue |
| الاشتقاق(التفاضل) | Differentiation |
| التحدب | Convexity |
| التكلفة الحدية | Marginal Cost |
| التكلفة الكلية | Total Cost |
| الربح الحدى | Marginal Profit |
| القيم العظمى والصغرى | Maxima and Minima |
| القيم القصوى | Extrema |
| المساحات فى المستوى | Areas in the plane |
| المشتقة الأولى | First Derivative |
| المشتقة العكسية | Antiderivative |
| النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل | Fundamental theorem of calculus |
| تحدب لأسفل | Convex Downward |
| تحدب لأعلى | Convex Upward |
| تضاؤل أسى | Exponential Decay |
| تفاضل لوغاريتمى | Logarithmic Differentiation |
| تفاضلى | Differential |
| تكامل | Integration |
| تكامل بالتجزئ | Integration by Parts |
| تكامل بالتعويض | Integration by Substitution |
| تكامل غير المحدد | Indefinite Integral |
| تكامل غير محدد | Indefinite integral |
| تكامل محدد | Definite Integral |
| ثابت اختيارى | Arbitrary constant |
| ثابت نابيير | Napier`s Constant |
| حجوم الأجسام الدورانية | Volumes of Revolution solids |
| دالة أسية | Exponential Function |
| دالة الطلب | Demand Function |
| دالة صريحة | Explicit Function |

| المصطلح | Term |
| --- | --- |
| دالة ضمنية | Implicit function |
| دالة متزايدة | Increasing Function |
| دالة متناقصة | Dereasing Functicn |
| دالة مثلثية | Trigonometric Function |
| دالة مثلثية | Trigonometric Function |
| صورة | Form |
| قاعدة | Rule |
| قوة | Power |
| قيمة صغرى محلية | Local Minimum |
| قيمة عظمى محلية | Local Maximum |
| قيمة قصوى محلية | Local Extrema |
| قيمة قصوى مطلقة | Absalute Extrema |
| لوغاريتم | Logarithm |
| لوغاريتم طبيعى | Natural Logarithm |
| لوغاريتم معتاد | Common Logarithm |
| مشتقات عليا | Higher Derivatives |
| مشتقة عكسية | Antiderivative |
| معادلة أسية | Exponential Equation |
| معادلة العمودى | Equation of the Normal |
| معادلة المماس | Equation of the Tangent |
| معدل | Rate |
| معدلات مرتبطة | Related Rates |
| ميل المماس | Slope of the Tangent |
| نقطة انقلاب | Infection Point |
| نقطة حرجة | Critical Point |
| نمو أسى | Exponential Growth |
| وسيط (بارامتر) | Parameter |

| الوحدة | مخرجات التعلم | الموضوعات | |
|---|---|---|---|
| الاشتقاق وتطبيقاته | ◂ يوجد مشتقات الدوال المثلثية قاس ، قتا س ، ظتا س.<br>◂ يوجد الاشتقاق لدوال ضمنية (صريحة ، ضمنية ، بارامترية ...).<br>◂ يوجد المشتقات العليا (الثانية والثالثة) لدوال مختلفة ويتعرف طريقة التعبير عنها .<br>◂ يوجد معادلتى المماس والعمودى لمنحنى عند نقطة تقع عليه كتطبيق على الاشتقاق.<br>◂ يوجد المعدلات الزمنية المرتبطة متضمنة التطبيقات الفيزيائية.<br>◂ ينمذج ويحل مشكلات حياتية واقتصادية. | الدرس الأول: اشتقاق الدوال المثلثية.<br>الدرس الثانى: الاشتقاق الضمنى والبارامترى.<br>الدرس الثالث: المشتقات العليا للدالة.<br>الدرس الرابع: معادلتى المماس والعمودى لمنحنى.<br>الدرس الخامس: المعدلات الزمنية المرتبطة. | |
| تفاضل وتكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية | ◂ يتعرف مفهوم العدد النيبيرى هـ من خلال النهايات<br>◂ $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}}\,(1+\text{س})^{\frac{1}{\text{س}}}=\text{هـ}$ ، $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\,(1+\frac{1}{\text{س}})^{\text{س}}=\text{هـ}$<br>◂ يوجد بعض النهايات التى تؤول إلى العدد هـ ومضاعفاته<br>◂ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\,(1+\frac{1}{\text{س}})^{2\text{س}}=\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\,[(1+\frac{1}{\text{س}})^{\text{س}}]^{2}=\text{هـ}^{2}$<br>◂ يتعرف مفهوم اللوغاريتم الطبيعى $\text{لو}_{\text{هـ}}$ من خلال النهاية<br>◂ $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}}\,\frac{\text{ا}^{\text{س}}-1}{\text{س}}=\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ا}$<br>◂ يتعرف بعض خواص اللوغاريتم الطبيعى مثل:<br>◂ $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}=\text{ص}\Leftrightarrow\text{هـ}^{\text{ص}}=\text{س}$<br>◂ $\text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}=\text{س}$ ، $\text{س}>0$<br>◂ $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ}=1$ ، $\text{لو}_{c}\text{س}=\frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ا}}$<br>◂ يوجد مشتقات الدوال الأسية $\text{ص}=\text{هـ}^{\text{س}}$ ، $\text{ص}=\text{ا}^{\text{س}}$ ، ومشتقه الدالة اللوغاريتمية $\text{ص}=\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ ، $\text{ص}=\text{لو}_{c}\text{س}$<br>◂ تكامل الدوال $\text{ص}=\text{هـ}^{\text{س}}$ ، $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ | الدرس الأول: دالة الأساس الطبيعى واللوغاريتم الطبيعى<br>الدرس الثانى: مشتقات الدوال الأسية واللوغاريتمية<br>الدرس الثالث: التكامل الدوال الأسية واللوغاريتيمة | |

| أساليب التقويم | استراتيجيات التدريس | المفاهيم | |
|---|---|---|---|
| تتمثل فى الأسئلة الشفهية والتحريرية الفردية والجماعية فى أثناء الدرس وبعد الدرس والأنشطة المقترحة وسلم التقييم الخاص بكل منها، والتكاليف الجماعية والفردية وتدريبات عامة على الوحدة والاختبار التراكمى فى نهاية الوحدة. | العرض المباشر - المناقشة - العصف الذهنى - الطريقة الاستنباطية - التعلم التعاونى - حل المشكلات. | الاشتقاق(التفاضل)-المشتقة الأولى-دالة مثلثية-دالة صريحة-دالة ضمنية-وسيط (بارامتر)-اشتقاق ضمنى-اشتقاق بارامترى-مشتقات عليا-ميل المماس-معادلة المماس-معادلة العمودى-معدل-معدلات مرتبطة-دالة الطلب-التكلفة الكلية-التكلفة الحدية-الإيراد الحدى-الربح الحدى | |
| تتمثل فى الأسئلة الشفهية والتحريرية الفردية والجماعية قبل وفى أثناء وبعد الدرس والأنشطة المقترحة وسلم التقييم الخاص بكل منها، والاختبار التراكمى فى نهاية كل وحدة. | العرض المباشر - المناقشة - العصف الذهنى - الطريقة الاستنباطية - التعلم التعاونى - حل المشكلات. | أس - قوة - أساس - أسس كسرية - نمو أسى - تضاؤل أسى - دالة أسية - معادلة أسية - لوغاريتم - صورة - لوغاريتم معتاد - لوغاريتم طبيعى - ثابت نابيير - تفاضل لوغاريتمى - المشتقة العكسية - تكامل - ثابت اختيارى - تكامل غير محدد | |

| الوحدة | مخرجات التعلم | الموضوعات | |
|---|---|---|---|
| سلوك الدالة ورسم المنحنيات | ◂ يستخدم المشتقة الأولى لدراسة تزايد وتناقص الدالة القابلة للاشتقاق.<br>◂ يحدد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة القابلة للاشتقاق.<br>◂ يتعرف ويوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة لدالة فى فترة مغلقة.<br>◂ يوجد النقط الحرجة والتحدب لأعلى والتحدب لأسفل ونقط الانقلاب لدالةٍ.<br>◂ يوجد العلاقة بين منحنى الدالة والمشتقة الأولى.<br>◂ يدرس سلوك دالة من حيث الاضطراد والقيم العظمى والصغرى من خلال المشتقة الأولى.<br>◂ يرسم المنحنيات لدوال كثيرة الحدود حتى الدرجة الثالثة فقط. | الدرس الأول: تزايد وتناقص الدوال<br>الدرس الثانى : القيم العظمى والصغرى ( القيم القصوى )<br>الدرس الثالث: رسم المنحنيات.<br>الدرس الرابع: تطبيقات على القيم العظمى والصغرى. | |
| التكامل المحدد وتطبيقاته | ◂ يتعرف بعض طرق التكامل مثل: التعويض غير المثلثى، التكامل بالتجزىء $\int \text{س هـ}^{\text{س}} \text{ ء س}$<br>◂ يتعرف تكامل الدوال المثلثية وجدول التكاملات الأساسية.<br>◂ يتعرف التكامل المحدد (النظرية الأساسية فى التفاضل) ويستنتج بعض خواصه.<br>◆ $\int_{\text{ب}}^{\text{أ}} \text{د(س) ء س} = -\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س) ء س}$<br>◆ $\int_{\text{أ}}^{\text{أ}} \text{د(س) ء س} = 0$<br>◆ $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ك د(س) ء س} = \text{ك} \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س) ء س}$<br>◆ $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} [\text{د(س)} \pm \text{ر(س)}] \text{ ء س}$<br>$= \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س) ء س} \pm \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ر(س) ء س}$<br>◆ $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س) ء س} + \int_{\text{ب}}^{\text{جـ}} \text{د(س) ء س} = \int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{د(س) ء س}$<br>◆ $\int_{-\text{أ}}^{\text{أ}} \text{د(س) ء س} = 2 \int_{0}^{\text{أ}} \text{د(س) ء س}$ حيث د دالة زوجية.<br>◆ $\int_{-\text{أ}}^{\text{أ}} \text{د(س) ء س} = 0$ حيث د دالة فردية.<br>◂ يتعرف العلاقة بين التفاضل والتكامل<br>◆ $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}} \int_{\text{أ}}^{\text{س}} \text{د(ن) ء ن} = \text{د(س)}$<br>◆ $\int_{\text{أ}}^{\text{س}} \text{د}/\text{(ن) ء ن} = \text{د(س)} - \text{د(أ)}$<br>◂ يستخدم التكامل المحدد فى حل مشكلات تتضمن إيجاد مساحة.<br>◂ يوجد مساحة المنطقة المستوية تحت المنحنى، فوق محور السينات حيث د (س) غير سالبة لجميع قيم س فى المجال باستخدام التكامل المحدد.<br>◂ يوجد مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين منحنيين.<br>◂ يستخدم التكامل المحدد فى حل مشكلات تتضمن إيجاد حجم سطح دورانى حول أحد محاور الإحداثيات. | الدرس الأول: طرق التكامل.<br>الدرس الثانى: تكامل الدوال المثلثية.<br>الدرس الثالث: التكامل المحدد.<br>الدرس الرابع: المساحات فى المستوى.<br>الدرس الخامس: حجوم الأجسام الدورانية. | |

## خريطة المنهج

| | المفاهيم | استراتيجيات التدريس | أساليب التقويم |
|---|---|---|---|
| | دالة متزايدة - دالة متناقصة - القيم العظمى والصغرى - القيم القصوى - نقطة حرجة - قيمة صغرى محلية - قيمة عظمى محلية - قيمة قصوى محلية - قيمة قصوى مطلقة - التحدب - تحدب لأعلى - تحدب لأسفل - نقطة انقلاب | العرض المباشر - المناقشة - العصف الذهنى - الاستنباط - حل المشكلات - التعلم التعاونى - مناقشة أبحاث علمية.<br>وهذه الطرق لاتستخدم جميعها فى درس واحد، ولكن بعضها يستخدم فى وقته المناسب من زمن الحصة. | تتمثل فى الأسئلة الشفهية والتحريرية الفردية والجماعية قبل وفى أثناء وبعد الدرس والأنشطة المقترحة وسلم التقييم الخاص بكل منها ، والتكاليف الجماعية والفردية وتدريبات عامة على الوحدة والاختبار التراكمى فى نهاية الوحدة . |
| | مشتقة عكسية - تكامل غير المحدد - تفاضلى - تكامل بالتعويض - تكامل بالتجزئ - قاعدة - دالة مثلثية - تكامل محدد - النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل - المساحات فى المستوى - حجوم الأجسام الدورانية | العرض المباشر - المناقشة - العصف الذهنى - الطريقة الاستنباطية - حل المشكلات. | تتمثل فى الأسئلة الشفهية والتحريرية الفردية والجماعية قبل وأثناء وبعد الدرس، والأنشطة المقترحة والتكليفات الجماعية والفردية وتدريبات عامة على الوحدة والاختبار التراكمى فى نهاية الوحدة. |

## تفاضل وتكامل

## أختبار استرشادى

**أولاً: أجب عن السؤال الآتى :**

① إختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

١- معادلة المماس لمنحنى الدالة د حيث د (س) = $هـ^{٢س+١}$ عند النقطة ( $\frac{-١}{٢}$ ، ١ ) هى: ..........................................

أ ٢ ص = س + ١      ب ص = ٢ س + ٢

جـ ص = ٢ س − ٣      د ٢ ص = ٣ س + ١

٢- إذا كان ص = ٤ $ن^{٣}$ + ٤ ، ع = ٣ $ن^{٢}$ − ٢ فإن معدل تغير ع بالنسبة إلى ص يساوى: ..........................................

أ ٢ ن      ب ٢

جـ $\frac{٢}{ن}$      د ٤

٣- أكبر قيمة للمقدار ٨ س − $س^{٢}$ حيث س ∈ ع هى ..........................................

أ ٨      ب ١٦

جـ ٣٢      د ٦٤

٤- $\int_{c}^{س}$ د(ع) ى ع = ٤ $س^{٢}$ − ٨ فإن أ تساوى: ..........................................

أ − $\sqrt{٢}$      ب ± $\sqrt{٢}$

جـ ٠      د ١

٥- $\int_{-١}^{٣}$ |س −١| ى س يساوى: ..........................................

أ −٦      ب ٠

جـ ٤      د ٨

٦- حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدده بالمنحنى ص = $\sqrt{س + ١}$ والمستقيمات ص = ٠ ، س = −١ ، س = ١ يساوى ..........................................

أ $\pi$      ب $\frac{٣\pi}{٢}$

جـ ٢ $\pi$      د $\frac{٥\pi}{٢}$

**ثانيًا: أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يأتى:**

٢ أ أوجد: $\int \frac{س^3}{س^2-1}$ ءس ، $\int$ ٩س$^2$ هـ$^{3س}$ ءس

ب أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها مماس المنحنى ص$^3$ = س$^2$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند س = ٨ لأقرب دقيقة .

٣ أ عين فترات التحدب لأعلى وفترات التحدب لأسفل ونقط الانقلاب (إن وجدت) لمنحنى الدالة د حيث د(س) = (س − ١)$^4$ + ٣

ب متوازى مستطيلات من المعدن قاعدته علي شكل مربع ، فإذا تزايد طول ضلع القاعدة بمعدل ٤ , ٠/ ث وتناقص الارتفاع بمعدل ٥ , ٠ سم / ث ، أوجد معدل تغير الحجم عندما يكون طول ضلع القاعدة ٦سم والأرتفاع ٥سم.

٤ أ حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة د حيث د (س) = س + ٢ حا س، ٠ < س < ٢ $\pi$

ب رسم مستطيل بحيث تقع رأسان متجاوران منه على المنحنى ص = س$^2$ − ١٢ والرأسان الآخران على المنحنى ص = ١٢ − س$^2$ إحسب أكبر مساحة لهذا المستطيل.

٥ أ أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين ص = س$^2$ ، ص = ٦س − س$^2$ بالوحدات المربعة

ب اذا كان للدالة د حيث د(س) = س$^3$ + أ س$^2$ + ب س نقطة إنقلاب عند (٢، ٢) فأوجد قيمتى الثابتين أ ، ب ثم إرسم الشكل العام لمنحنى الدالة.

## تقييم أداء الطالب فى الرياضيات

**توجيهات لإنشاء وتطوير نظام تقييم موثوق به:**

إن إنشاء وتطوير نظام تقييم موثوق به هو عملية مستمرة. تظهر بعض أدوات التقييم، منذ الوهلة الأولى، مناسبة جدًّا للمعلم ولطلابه، وتظهر أدوات أخرى جودة وفعالية بعد أن تتاح للمعلم فرصة تجريبها وتحسينها، وفى الوقت نفسه هناك أدوات غير صالحة لمستوى ما ولموقف تعليمى معين.

وهنا نضع بين أيدى زملائنا المعلمين بعض التوجيهات التى قد تكون مفيدة عند اختيار نماذج التقييم لبرنامج ما.

**استخدام نموذج التقييم الذى يحقق أهدافك بحيث:**

- يؤمن مراجعة لطرق التعليم التى استخدمتها، ويعطيك الدلائل التى تستفيد منها فى إعادة النظر وتعديل محتوى وسرعة عملية التعليم.
- يؤمن للطالب تأكيدًا لنجاحة في مجال ما، بالإضافة إلى تحديد التحسين المطلوب في مجالات أخرى.
- تؤمن نظم التقييم المتعارف عليها نتائج واقعية ملموسة.

**اجعل من عملية التقييم خبرة إيجابية للطلاب وذلك من خلال:**

- استخدام أساليب منوَّعة للتقييم.
- توفير فرص للطلاب يعرضون فيها إمكاناتهم الرياضية في جو يسمح بالأداء الأفضل.
- التركيز على ما يعرفه الطلاب ويتقنونه، لا على ما لا يعرفونه أو يتقنونه.
- حفز الطلاب على التحصيل بوضعهم أمام مهام تعكس قيمة جهودهم.

**استخدام تقييم الأداء في التركيز على مهارات التفكير العليا، وذلك من خلال:**

- التركيز على تقييم الأداء الذى يصور الطالب مفكرًا ناقدًا وحالا للمسائل.
- تحديد كيفية تعامل الطالب مع الرياضيات، لا كيفية حل المسائل فقط.

**قدم الأنشطة التقويمية التى تشبه المهام اليومية، وذلك من خلال:**

استخدام الأنشطة التقويمية التى تشبه المهام اليومية، وذلك من خلال:

- استخدام أنشطة متشابهة للأنشطة التدريسية فى عمل التقييم.
- استخدام الأنشطة التقويمية في تأكيد التعليم.
- تقديم التغذية الراجعة التفصيلية الفورية التى يحتاج إليها الطلاب لتأكيد عمليات التعلم.

**أشرك كل طالب في عمليات التقييم، وذلك من خلال:**

- تشجيع الطلاب على عرض أعمالهم.
- تشجيع الطلاب على المشاركة في تحقيق الأهداف.

## استطلاع رأى الطالب

لكل عبارة من العبارات التالية ضع علامة (✓) أسفل الخانة التى تصف إحساسك.

| العبارة | معظم الوقت | بعض الوقت | نادرًا ما يحدث |
|---|---|---|---|
| أتقدم بشكل ملحوظ فى مادة الرياضيات. | | | |
| احتاج إلى المساعدة فى حل كثير من المسائل. | | | |
| الرياضيات لها فائدة في جميع المواقف الحياتية | | | |
| أفهم المسائل اللفظية | | | |
| أستطيع حل معظم المسائل | | | |
| أفضِّل تجريب استراتيجيات جديدة في حل المسائل | | | |
| أصاب بالإحباط بسهولة من دراسة الرياضيات | | | |
| لدى دفتر منظم لمادة الرياضيات | | | |
| أعتقد أن الرياضيات ممتعة | | | |

صف مشروعًا تفضِّل أن يعمل به الفصل.　　　ما نوع الرياضيات المفضلة لديك؟ ولماذا؟

اكتب قائمة ببعض الأنشطة التى مارستها خارج المدرسة، واستخدمت فيها الرياضيات.

## تقييم ذاتى لعمل الفريق:

أسماء الفريق: ..........................................................................................................

اقرأ جيدًا كل عبارة من العبارات التالية، ثم أعط التقدير (٤) لمجموعتك إذا كنت توافق على العبارة، والتقدير (٣) إذا كنت توافق إلى حدٍّ ما، والتقدير (٢) إذا كنت لا توافق إلى حدًّ ما، والتقدير (١) إذا كنت لا توفق، واستخدم (غ م) وتعنى غير ملائم إذا كانت العبارة لا تنطبق على هذا الموقف. حوِّط استجابة واحدة لكل وصف لمجموعتك.

| العبارات | موافق | موافق إلى حد ما | غير موافق إلى حد ما | غير موافق | غير ملائم |
|---|---|---|---|---|---|
| أعضاء المجموعة ...... | | | | | |
| أنجزوا المهام المكلفين بها. | ٤ | ٣ | ٢ | ١ | غ م |
| فهموا جيدًا الغرض من المهمة | ٤ | ٣ | ٢ | ١ | غ م |
| فهموا جيدًا حل المهمة | ٤ | ٣ | ٢ | ١ | غ م |
| استمعوا جيدًا إلى كل من الأفكار الأخري. | ٤ | ٣ | ٢ | ١ | غ م |
| قدموا تغذية راجعة لذوى الأفكار المشوشة. | ٤ | ٣ | ٢ | ١ | غ م |
| تعاونوا في تجهيز العمل الذى تم تجميعة. | ٤ | ٣ | ٢ | ١ | غ م |
| استقوا تكليفاتهم من اليوم السابق. | ٤ | ٣ | ٢ | ١ | غ م |
| عرضوا أفكارهم على المجموعة. | ٤ | ٣ | ٢ | ١ | غ م |
| تفاهموا مع بعضهم البعض عند الحاجة. | ٤ | ٣ | ٢ | ١ | غ م |

من خلال العمل مع فريق، تعلمت ..........................................................................................................

## سجل عمل الفريق

**أسماء الفريق:**

لكل فريق عمل سجِّل التاريخ، والمهمة التى كلفوا بها، وأرقام الصفحات، ثم صف عمل أعضاء الفريق معًا للوصول إلى حل جماعى للمهمة التى كلفوا بها . اذكر أى طرق أو أساليب وجدتها مفيدة لإنجاز المهمة.

| التاريخ | المهمة | وصف عمل الفريق |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |

## التقييم الذاتى للطالب

المهمة:

**اكتب عمّا قمت بإنجازه.**

مال الذى حاولت تعلُّمه؟ كيف بدأت عملك؟ مال الأدوات التى كنت في حاجة إليها؟ ما الذى تعلمته؟

**ضع علامة (✓) أمام العبارات التى تصف طريقة عملك.**

خطَّطت قبل البدء في العمل. كنت قادرًا على إجراء هذا العمل.

## خبراتى في الرياضيات

الرياضيات التى أفضِّلها:

مهارات الرياضيات التى أتقنتها وأستطيع استخدامها:

المكافآت التى حصلت عليها في الرياضيات:

الأهداف التى أريد تحقيقها في مجال دراسة الرياضيات:

مهارات الرياضيات التى أحتاج إلى مزيد من التمرين عليها:

## تقييم الأداء في حل المسائل

**ضع علامة (✓) أسفل العمود المناسب والذى يصف بدقة عمل الطالب:**

| | فى معظم الأحيان | بعض الأحيان | أبدًا |
|---|---|---|---|
| **افهم** | | | |
| يقرأ المسألة بعناية. | ...................... | ...................... | ...................... |
| يدرس أى جدول أو أي رسم بيانى. | ...................... | ...................... | ...................... |
| يستطيع أن يصوغ المسألة من جديد وبطريقته وعباراته الخاصة. | ...................... | ...................... | ...................... |
| يستطيع فهم وإدراك المعلومات المعطاة. | ...................... | ...................... | ...................... |
| يستطيع فهم وإدراك السؤال الذى يجب الإجابة عنه. | ...................... | ...................... | ...................... |
| **خطط** | | | |
| يختار الخطة الأنسب لحل المسألة. | ...................... | ...................... | ...................... |
| يقدر الإجابة الصحيحة. | ...................... | ...................... | ...................... |
| **حل** | | | |
| يعمل وفق منهجية معينة. | ...................... | ...................... | ...................... |
| يعرض الحل بطريقة منظمة ومنطقية. | ...................... | ...................... | ...................... |
| يحسب بطريقة صحيحة. | ...................... | ...................... | ...................... |
| يعطى الإجابة بجملة كاملة صحيحة، مراعيًا الوحدات. | ...................... | ...................... | ...................... |
| **تحقق** | | | |
| يتحقق من معقولية الإجابة. | ...................... | ...................... | ...................... |
| يجرب طرقًا أخرى لحل المسألة. | ...................... | ...................... | ...................... |
| **اتجاه** | | | |
| يظهر استعدادًا لمحاولة حل المسألة. | ...................... | ...................... | ...................... |
| يظهر ثقة بالنفس. | ...................... | ...................... | ...................... |
| محاولات خاطئة لحل المسألة. | ...................... | ...................... | ...................... |

**تعليقات أخرى**

# نماذج من أساليب التقويم

**التقييم المستمر:** حل المسائل

التاريخ: ..........................................................................

**قدر كل بند بـ:**

- ++ إذا كان ممتازًا
- + إذا كان جيدًا.
- ✓ إذا كان مقبولًا
- − بحاجة إلى التطوير
- غ.ت. غير قابل للتطبيق.

| | يقرأ المسألة بعناية. | يدرس الصور والجداول والتمثيلات البيانية. | يستطيع إعادة صياغة المسألة بأسلوبه الخاص. | يستطيع تحديد المعلومات | يستطيع تحديد الأسئلة التي تتطلب الإجابة عنها | يختار الخطة المناسبة. | يقدر ما ستكون عليه الإجابة | يعمل بانتظام | يكتب الحل بطريقة منظمة. | يجري العمليات الحسابية بدقة. | يكتب الإجابة في جملة كاملة مع ذكر الوحدات الصحيحة. | يتحقق من صحة الإجابة ومعقوليتها. | يجري طرقًا أخرى للحل. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ١- | | | | | | | | | | | | | |
| ٢- | | | | | | | | | | | | | |
| ٣- | | | | | | | | | | | | | |
| ٤- | | | | | | | | | | | | | |
| ٥- | | | | | | | | | | | | | |
| ٦- | | | | | | | | | | | | | |
| ٧- | | | | | | | | | | | | | |
| ٨- | | | | | | | | | | | | | |
| ٩- | | | | | | | | | | | | | |
| ١٠- | | | | | | | | | | | | | |
| ١١- | | | | | | | | | | | | | |
| ١٢- | | | | | | | | | | | | | |
| ١٣- | | | | | | | | | | | | | |
| ١٤- | | | | | | | | | | | | | |
| ١٥- | | | | | | | | | | | | | |
| ١٦- | | | | | | | | | | | | | |
| ١٧- | | | | | | | | | | | | | |
| ١٨- | | | | | | | | | | | | | |
| ١٩- | | | | | | | | | | | | | |
| ٢٠- | | | | | | | | | | | | | |
| ٢١- | | | | | | | | | | | | | |
| ٢٢- | | | | | | | | | | | | | |
| ٢٣- | | | | | | | | | | | | | |
| ٢٤- | | | | | | | | | | | | | |
| ٢٥- | | | | | | | | | | | | | |
| ٢٦- | | | | | | | | | | | | | |
| ٢٧- | | | | | | | | | | | | | |
| ٢٨- | | | | | | | | | | | | | |

**التقييم المستمر:** الملاحظة

التاريخ: ..............................................................

قدر كل بند بـ:

++ إذا كان ممتازًا

+ إذا كان جيدًا.

✓ إذا كان مقبولًا

− بحاجة إلى التطوير

غ.ت. غير قابل للتطبيق.

| | يظهر معرفة بالمهارات | يدرك المفاهيم | يعمل بترتيب ونظام | يعمل بنجاح مع الآخرين | يظهر مواقف إيجابية | يحترم أفكار الغير ويستخدمها | يظهر صبرًا ومثابرة | يطلب المساعدة عند الحاجة | يستخدم الوقت بإنتاجية | يجرى طرقًا أخرى للحل |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ١– | | | | | | | | | | |
| ٢– | | | | | | | | | | |
| ٣– | | | | | | | | | | |
| ٤– | | | | | | | | | | |
| ٥– | | | | | | | | | | |
| ٦– | | | | | | | | | | |
| ٧– | | | | | | | | | | |
| ٨– | | | | | | | | | | |
| ٩– | | | | | | | | | | |
| ١٠– | | | | | | | | | | |
| ١١– | | | | | | | | | | |
| ١٢– | | | | | | | | | | |
| ١٣– | | | | | | | | | | |
| ١٤– | | | | | | | | | | |
| ١٥– | | | | | | | | | | |
| ١٦– | | | | | | | | | | |
| ١٧– | | | | | | | | | | |
| ١٨– | | | | | | | | | | |
| ١٩– | | | | | | | | | | |
| ٢٠– | | | | | | | | | | |
| ٢١– | | | | | | | | | | |
| ٢٢– | | | | | | | | | | |
| ٢٣– | | | | | | | | | | |
| ٢٤– | | | | | | | | | | |
| ٢٥– | | | | | | | | | | |
| ٢٦– | | | | | | | | | | |
| ٢٧– | | | | | | | | | | |
| ٢٨– | | | | | | | | | | |

**التقييم المستمر:** التعلم التعاونى

التاريخ: ..........................................................................

**قدر كل بند بـ:**
- ++ إذا كان ممتازًا
- + إذا كان جيدًا.
- ✓ إذا كان مقبولًا
- − بحاجة إلى التطوير
- غ.ت. غير قابل للتطبيق.

| | يظهر قدرة على حل المسائل | يعمل بانتظام | يعمل مع آخرين في الفريق | يوجه ويساعد آخرين | يحترم آراء الآخرين ويستخدمها | يتكلم بهدوء | يطرح أسئلة | يظهر ميولًا إيجابية | يظهر صبرًا ومثابرة | يظهر عدم موافقة دون اشمئزاز |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ١- | | | | | | | | | | |
| ٢- | | | | | | | | | | |
| ٣- | | | | | | | | | | |
| ٤- | | | | | | | | | | |
| ٥- | | | | | | | | | | |
| ٦- | | | | | | | | | | |
| ٧- | | | | | | | | | | |
| ٨- | | | | | | | | | | |
| ٩- | | | | | | | | | | |
| ١٠- | | | | | | | | | | |
| ١١- | | | | | | | | | | |
| ١٢- | | | | | | | | | | |
| ١٣- | | | | | | | | | | |
| ١٤- | | | | | | | | | | |
| ١٥- | | | | | | | | | | |
| ١٦- | | | | | | | | | | |
| ١٧- | | | | | | | | | | |
| ١٨- | | | | | | | | | | |
| ١٩- | | | | | | | | | | |
| ٢٠- | | | | | | | | | | |
| ٢١- | | | | | | | | | | |
| ٢٢- | | | | | | | | | | |
| ٢٣- | | | | | | | | | | |
| ٢٤- | | | | | | | | | | |
| ٢٥- | | | | | | | | | | |
| ٢٦- | | | | | | | | | | |
| ٢٧- | | | | | | | | | | |
| ٢٨- | | | | | | | | | | |

## التقيم الفردى من خلال الملاحظة

| | دائمًا | أحيانًا | أبدًا |
|---|---|---|---|
| **الفهم** | | | |
| يظهر معرفة بالمهارات. | ........................ | ........................ | ........................ |
| يدرك المفاهيم. | ........................ | ........................ | ........................ |
| يختار الخطة المناسبة للحل. | ........................ | ........................ | ........................ |
| يحل المسائل بدقة. | ........................ | ........................ | ........................ |
| **عادات العمل** | | | |
| يعمل بطريقة منظمة. | ........................ | ........................ | ........................ |
| يعمل بنظافة. | ........................ | ........................ | ........................ |
| يقدم العمل في الوقت المحدد. | ........................ | ........................ | ........................ |
| يعمل مع الآخرين بتناغم. | ........................ | ........................ | ........................ |
| يستخدم الوقت بفاعلية وإنتاجية. | ........................ | ........................ | ........................ |
| يطلب المساعدة عند الحاجة. | ........................ | ........................ | ........................ |
| **الثقة بالنفس** | ........................ | ........................ | ........................ |
| يبادر بتوجيه الأسئلة. | ........................ | ........................ | ........................ |
| إيجابى التوجيه والسلوك. | ........................ | ........................ | ........................ |
| يساعد الآخرين. | ........................ | ........................ | ........................ |
| **المرونة** | | | |
| يجرب طرقًا أخرى. | ........................ | ........................ | ........................ |
| يحترم ويستخدم أفكار الآخرين. | ........................ | ........................ | ........................ |
| يستخدم الرياضيات الذهنية والتقدير. | ........................ | ........................ | ........................ |
| يستخدم الآلات الحاسبة والتقنيات الأخرى. | ........................ | ........................ | ........................ |
| **المثابرة** | | | |
| يظهر صبرًا ومثابرة. | ........................ | ........................ | ........................ |
| يعمل وفق منهجية معينة. | ........................ | ........................ | ........................ |
| يظهر استعدادًا للمحاولة والتجربة. | ........................ | ........................ | ........................ |
| يتأكد من صحة عمله دون أن يطلب منه. | ........................ | ........................ | ........................ |

# نماذج من أساليب التقويم

**التقييم العام للطالب:**

**التاريخ:** ............................................................

**قدر كل بند بـ:**

++ إذا كان ممتازًا

+ إذا كان جيدًا.

✓ إذا كان مقبولًا

− بحاجة إلى التطوير

غ.ت. غير قابل للتطبيق.

| | حل المسائل | التعلم التعاونى | الكتابة في الرياضيات | نشاط غرفة الفصل | الواجبات المنزلية | المشاركة في المناقشة | درجات الاختبارات القصيرة | درجات الامتحانات | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ١- | | | | | | | | | | |
| ٢- | | | | | | | | | | |
| ٣- | | | | | | | | | | |
| ٤- | | | | | | | | | | |
| ٥- | | | | | | | | | | |
| ٦- | | | | | | | | | | |
| ٧- | | | | | | | | | | |
| ٨- | | | | | | | | | | |
| ٩- | | | | | | | | | | |
| ١٠- | | | | | | | | | | |
| ١١- | | | | | | | | | | |
| ١٢- | | | | | | | | | | |
| ١٣- | | | | | | | | | | |
| ١٤- | | | | | | | | | | |
| ١٥- | | | | | | | | | | |
| ١٦- | | | | | | | | | | |
| ١٧- | | | | | | | | | | |
| ١٨- | | | | | | | | | | |
| ١٩- | | | | | | | | | | |
| ٢٠- | | | | | | | | | | |
| ٢١- | | | | | | | | | | |
| ٢٢- | | | | | | | | | | |
| ٢٣- | | | | | | | | | | |
| ٢٤- | | | | | | | | | | |
| ٢٥- | | | | | | | | | | |
| ٢٦- | | | | | | | | | | |
| ٢٧- | | | | | | | | | | |
| ٢٨- | | | | | | | | | | |

**قائمة المراجعة/عرض المشروع**

يمكن أن يستخدم هذا النموذج لتقييم مشروع ما مقدم من قبل طالب واحد أو من مجموعة طلاب شفهيًّا أو كتابة، كما أنه من الممكن أن يستخدم لمناقشة طرق ناجحة لتقديم أى مادة، ومن المفيد أن يقدم للطلاب لإرشادهم فى التخطيط لأى مشروع في فن الرياضيات أو التجارب العلمية، أو تجميع البيانات لعمل الجداول والرسوم البيانية، أو عروض حاسوبية، أو مسرحيات هزلية قصيرة، أو أى مشروع بحثى سواء أكان شفهيًّا أم مكتوبًا.

الطالب/ الطلاب: .................................................................................................

المشروع: .......................................................................................................

**المشروع**

يعرض مفهومًا رياضيًا بشكل جيد.

يتواصل مع الأفكار الرياضية بوضوح.

يربط مع مواد أخرى.

يظهر الوقت الذى انقضى عليه تخطيطًا وتحضيرًا.

هو أصيل و/ أو مبدع.

هو نابض بالحياة ونظيف.

يثير المزيد من الاستقصاءات حول الموضوع.

يتضمن تقريرًا مكتوبًا.

يذكر المواد المستخدمة.

يظهر توزيع المهام التى كلفت بها مجموعة الطلاب.

**قدر كل بند بـ:**

++ إذا كان ممتازًا

+ إذا كان جيدًا.

✓ إذا كان مقبولًا

− بحاجة إلى التطوير

غ.ت. غير قابل للتطبيق.

**التقويم الشفهى**

يظهر معرفة للمفهوم الرياضي

منظم: يتضمن مقدمة ومضمونًا وخاتمة.

يستخدم الوسائل السمعية/ البصرية عند الحاجة وفى الوقت المناسب.

يتكلم بوضوح ويضبط التقويم بما يناسب من سرعات.

يجيب عن الأسئلة ويثير مزيدًا من الاهتمام بالموضوع.

يظهر ميلًا وتوجهًا إيجابيين لحل المسائل.

يذكر الموارد المستخدمة.